



Friedrich-Alexander-Universität
Naturwissenschaftliche Fakultät

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

Skript zur Vorlesung
Wintersemester 2021/22

HANNES MEINLSCHMIDT
meinschmidt@math.fau.de

Chair for Dynamics, Control and Numerics
Department of Data Science

Vorläufig finale Version
21. April 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlegendes	2
1.1.1	Notation	3
1.1.2	Funktionsräume	4
1.1.3	Satz von Gauß	6
1.1.4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	7
1.2	Beispiele Partieller Differentialgleichungen	9
1.3	Partielle Differentialgleichungen: Wie und was?	12
2	Grundlegende partielle Differentialgleichungen	13
2.1	Lineare Transportgleichung	13
2.1.1	Methode der Charakteristiken	14
2.1.2	Eigenschaften der Lösung	16
2.2	Poisson-Gleichung	18
2.2.1	Lösungsdarstellung	19
2.2.2	Eigenschaften der Lösung	24
2.2.3	Energiemethoden	28
2.3	Wärmeleitungsgleichung	30
2.3.1	Lösungsdarstellung	31
2.3.2	Eigenschaften der Lösung	35
2.3.3	Energiemethoden	36
2.4	Wellengleichung	40
2.4.1	Die Eindimensionale Wellengleichung	40
2.4.2	Sphärische Mittelwerte in höheren Dimensionen	42
2.4.3	Eigenschaften der Lösung	43
2.4.4	Energiemethoden	44
3	Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung	47
3.1	Funktionalanalytische Grundlagen	49
3.1.1	Der Satz von Lax-Milgram	52
3.1.2	Distributionelle Ableitungen	54
3.2	Sobolevräume	57
3.2.1	Approximation mit glatten Funktionen	59
3.2.2	Randregularität	62
3.2.3	Globale Approximation durch glatte Funktionen	63
3.2.4	Randwerte und Spuroperator	64
3.2.5	Fortsetzungen	67
3.2.6	Die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ und Dualräume	69
3.2.7	Sobolev-Ungleichungen und Einbettungssätze	73

3.3	Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung	82
3.4	Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	86
3.5	Regularität	92
4	Fixpunktmethoden für nichtlineare elliptische Gleichungen zweiter Ordnung	105
4.1	Banachscher Fixpunktsatz	107
4.2	Fixpunktsatz von Brouwer	110
4.3	Fixpunktsatz von Schauder	112

1 Einleitung

Partielle Differentialgleichungen sind heute eines der wesentlichsten Mittel bei der mathematischen Beschreibung realer Prozesse, die in verschiedensten Anwendungsfeldern zum Einsatz kommen. Auch mathematisch bieten partielle Differentialgleichungen äusserst interessante Strukturen, mit vielen Verbindungen zu anderen Feldern wie Analysis, Funktionalanalysis, Differentialgeometrie, Stochastik und natürlich Numerik.

Diese Vorlesung soll einen ersten Einblick in die Theorie partieller Differentialgleichungen (engl. **partial differential equations**, PDE) geben. Im Herangehen und auch vielen inhaltlichen Fragen folgt die Vorlesung dem Buch von Evans Evans (1998), das wohl zurecht von vielen als das Standardwerk zum Thema gilt. Insbesondere werden wir uns nach der Behandlung grundlegender linearer partieller Differentialgleichungen auch mit nichtlinearen solchen beschäftigen. Wir konzentrieren uns in dieser Vorlesung auf die Analysis von Anfangs- und Randwertproblemen für PDEs; andere wichtige Aspekte werden in parallelen oder weiterführenden Vorlesungen behandelt. Neben Analysis-zentrischen Vorlesungen wie *PDGL 2/3, Regularitätstheorie elliptischer Probleme* und weiteren sind dies, in nicht-vollständiger Auflistung:

- Herleitung von partiellen Differentialgleichungen als Modell für reale Prozesse (Vorlesungen zu Mathematischer Modellierung).
- Numerische Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen (Vorlesungen *Numerik Partieller Differentialgleichungen, Advanced Discretization Techniques, ...*).
- Inverse und schlecht gestellte Probleme bei partiellen Differentialgleichungen (Vorlesung *Inverse Problems*).
- Optimale Kontrolle für partielle Differentialgleichungen (Vorlesung *Optimization with PDE constraints*).
- Anwendungen partieller Differentialgleichungen in der Bildverarbeitung (Vorlesung *PDEs in Image Processing*).
- Forschungsnahe Themen (Seminare, Praktika).

Dieses Skript basiert wesentlich auf Vorlesungsunterlagen von Martin Burger und Cornelia Schneider, die die Vorlesung in vergangenen Semestern an der FAU Erlangen-Nürnberg gehalten haben.

1.1 Grundlegendes

Wir betrachten in dieser Vorlesung partielle Differentialgleichungen, also Gleichungen, in denen wir Funktionen als Unbekannte suchen und in denen insbesondere partielle Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Um dies zu formalisieren, bezeichnen wir für eine reellwertige Funktion u in n Variablen mit $D^k u$ die Sammlung der k -ten Ableitungen, d.h.

$$D^k u = \left\{ P \left[\underbrace{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_1}}_{k_1 \text{ mal}}, \underbrace{\partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_2}}_{k_2 \text{ mal}}, \dots, \underbrace{\partial_{x_n}, \dots, \partial_{x_n}}_{k_n \text{ mal}} \right] u : \sum k_j = k, P \text{ } k\text{-Permutation} \right\}.$$

Für Ausdrücke der obigen Form werden wir häufig eine *Multiindex*-Notation verwenden:

$$D^\alpha u := \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \dots \partial_{x_n}^{k_n} u, \quad \alpha = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n,$$

wobei hier die Permutationen bzw. die Reihenfolge der verschiedenen Ableitungen stillschweigend mitbetrachtet werden, ohne sich explizit auf diese zu beziehen. Für den Multiindex benutzen wir weiter den Betrag, d.h. seine ℓ^1 -Norm $|\alpha| := \sum k_j$. Beachte, dass im vorigen Ausdruck die Permutation P , sprich, die tatsächliche Reihenfolge der partiellen Ableitungen, versch

Damit können wir auch gleich den wesentlichsten Begriff, den der *partiellen Differentialgleichung* klären:

Definition 1.1: Partielle Differentialgleichung

test Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachte

$$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \supseteq \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Eine Relation der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in U) \quad (1.2)$$

heisst *partielle Differentialgleichung der Ordnung k* , bei der die Funktion $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ die Unbekannte ist. Hierbei ist implizit angenommen, dass F nicht konstant von der ersten Komponente, korrespondierend zu $D^k u$, abhängt.

Wie bei jeder Gleichung kann man auch partielle Differentialgleichungen in lineare und nichtlineare bzgl. der gesuchten Größe unterteilen. Hier ist die mögliche Unterteilung aber noch ein bisschen feiner:

Definition 1.2: Klassifikation partieller Differentialgleichungen

Die partielle Differentialgleichung (1.2) heisst ...

- *linear*, wenn F von allen Variablen ausser x affin-linear abhängt, d.h. F hat die Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + f(x)$$

für geeignete Funktionen $a_\alpha, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

- *semilinear*, wenn F aus einem linearen Anteil in den höchsten Ableitungen plus

einem nichtlinearen Anteil in den niedrigeren Ableitungen besteht, d.h.

$$\begin{aligned} F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \\ = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + G(D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \end{aligned}$$

mit a_α wie zuvor und einer Funktion G wie in (1.1) für $k-1$ *mutatis mutandis*,

- *quasilinear*, wenn F in den höchsten Ableitungen linear ist, d.h.

$$\begin{aligned} F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \\ = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u(x) \\ + G(D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) \end{aligned}$$

mit G wie zuvor und a_α wie G ,

- *voll nichtlinear*, wenn F wirklich nichtlinear von $D^k u$ abhängt.

1.1.1 Notation

Zu Beginn werden wir einige grundlegende Notationen festhalten und die wesentlichen Differentialoperatoren einführen.

Grundsätzlich werden wir Funktionen in $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ betrachten, die wir mit u bezeichnen. In manchen Fällen werden wir zusätzlich u als Funktion einer Zeitvariable $t \in \mathbb{R}^+$ betrachten.

Partielle Ableitungen bezeichnen wir mit ∂_{x_i} bzw. ∂_t , die gesamten Ableitungen wie oben mit D^k . Wir nutzen die Kurzschreibweise $\partial_{x_i x_j}^2 := \partial_{x_i} \partial_{x_j}$. Die Sammlung der ersten Ortsableitungen bezeichnen wir als *Gradienten* und ordnen sie als Spaltenvektor:

$$\nabla u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)^T.$$

Die Sammlung der zweiten Ortsableitungen wird auch *Hessematrix* genannt und entsprechend angeordnet:

$$\nabla^2 u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1}^2 u & \dots & \partial_{x_1 x_n}^2 u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n x_1}^2 u & \dots & \partial_{x_n x_n}^2 u \end{pmatrix}.$$

Weiters bezeichnen wir die *Divergenz* eines n -Vektorfelds V als

$$\nabla \cdot V := (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \partial_{x_1} V_1 + \dots + \partial_{x_n} V_n.$$

Die Hintereinanderausführung von Divergenz und Gradient bezeichnen wir mit dem *Laplace-Operator* Δ :

$$\Delta u := \nabla \cdot \nabla u = \partial_{x_1 x_1}^2 u + \dots + \partial_{x_n x_n}^2 u = \text{Spur}(\nabla^2 u).$$

Für die Randbedingungen, die zwecks Eindeutigkeit für partielle Differentialgleichungen gestellt werden, werden wir auch noch eine *Normalenableitung* benötigen. Sei dafür $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (eine nichtleere, zusammenhängende offene Menge) und $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ der äußere Normalenvektor am Rand von Ω . (Wir nehmen hier an, dass das Gebiet so freundlich “glatt” ist, dass dieser Vektor existiert und eindeutig ist.) Dann verwenden wir die Notation

$$\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Die Normalenableitung $\partial_\nu u$ beschreibt den *Fluss* von u über den Rand von Ω .

1.1.2 Funktionenräume

Da wir als Lösungen von PDEs Funktionen suchen, werden wir mit Funktionsräume arbeiten, in denen wir diese Lösungen klassifizieren. Die grundlegendsten wollen wir hier kurz definieren. Dazu sei im folgenden $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer.

Den Raum stetiger Funktionen bezeichnen wir als

$$C(\Upsilon) = C^0(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}: u \text{ ist stetig auf } \Upsilon \right\}.$$

Rekursiv definieren wir dann für $k \in \mathbb{N}$ die Räume der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen als

$$C^k(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}: \partial_{x_i} u \in C^{k-1}(\Upsilon), i = 1, \dots, n \right\}.$$

Glatte Funktionen auf Υ sind entsprechend gegeben durch

$$C^\infty(\Upsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Upsilon).$$

Ein weiterer wichtiger Raum als Grundlage für viele Ansätze ist

$$C_0^\infty(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}: u \in C^\infty(\Upsilon) \text{ und } \text{supp } u \text{ ist kompakt in } \Upsilon \right\},$$

wobei

$$\text{supp } u := \overline{\left\{ x \in \Upsilon: u(x) \neq 0 \right\}}$$

der *Träger* von $u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$ ist.¹ In den Räumen glatter Funktionen muss man sich über Differenzierbarkeit keine Sorgen machen und darf sich, im Falle von $C_0^\infty(\Upsilon)$, zudem immer auf den kompakten Träger zurückziehen. Andererseits sind die glatten Funktionen in vielen wichtigen Funktionenräumen dicht, was erlaubt, viele Argumente nur für diese durchzuführen und dann per Approximation zu verallgemeinern.

Wenn Υ *kompakt* ist (beschränkt und abgeschlossen), versehen wir $C(\Upsilon)$ mit der *Supremumsnorm*

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{C^0(\Upsilon)} := \|u\|_{C(\Upsilon)} := \sup_{x \in \Upsilon} |u(x)| \tag{1.3}$$

¹Der Raum $C_0^\infty(\Upsilon)$ wird auch oft als $C_c^\infty(\Upsilon)$ bezeichnet.

und erhalten einen Banachraum. (Vollständiger normierter Vektorraum.) Analog ist in diesem Fall $C^k(\Upsilon)$ mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\Upsilon)} = \max\left\{\|u\|_{C^{k-1}(\Upsilon)}, \max\{\|\partial^\alpha u\|_\infty : |\alpha| = k\}\right\},$$

ebenfalls ein Banachraum. Wenn Υ beschränkt, aber nicht abgeschlossen ist, wechseln wir häufig auf den Abschluss $\overline{\Upsilon}$, der dann kompakt ist.

Um auch im Falle eines unbeschränkten Υ Banachräume zu erhalten, betrachten wir

$$C_b(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ist stetig und beschränkt auf } \Upsilon \right\},$$

und versehen dies wieder mit der Supremumsnorm (1.3). Analog verfahren wir für $C_b^k(\Upsilon)$.

Neben stetigen Funktionen sind insbesondere mess- und integrierbare Funktionen interessant, für die wir die Lebesgue-Räume L^p verwenden. Wenn nicht anders genannt, beziehen sich die Lebesgue-Räume und der Begriff "messbar" immer auf das Lebesgue-Maß. Entsprechend nehmen wir nun Υ als (Lebesgue)-messbar an. Für $1 \leq p < \infty$ setzen wir dann

$$\mathcal{L}^p(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

und

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Upsilon)} := \left(\int_\Upsilon |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.4)$$

Im Fall $p = \infty$ definieren wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Upsilon} |u(x)| < \infty \right\},$$

mit dem *essentiellen Supremum*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\Upsilon)} = \|u\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Upsilon} |u(x)| := \inf_{|N|=0} \sup_{x \in \Upsilon \setminus N} |u(x)|,$$

wobei $|N|$ das n -dimensionale Lebesgue-Maß von N bezeichnet. Die so definierten Größen $\|u\|_{\mathcal{L}^p(\Upsilon)}$ ($1 \leq p \leq \infty$) sind nur *Seminormen*, da sie nicht zwischen Funktionen unterscheiden können, die fast überall (also: bis auf eine Nullmenge) gleich sind. Daher führen wir die Äquivalenzrelation \sim_Υ ein:

$$u \sim_\Upsilon v \quad := \quad u - v = 0 \quad \text{f.ü. auf } \Upsilon,$$

und definieren $L^p(\Upsilon)$ als die Faktorräume $\mathcal{L}^p(\Upsilon)/\sim_\Upsilon$. Formell gesehen sind die Elemente von $L^p(\Upsilon)$ dann Äquivalenzklassen $[u]$ von Funktionen $u \in \mathcal{L}^p(\Upsilon)$, was wir aber im Weiteren stillschweigend hinnehmen und dennoch über *Funktionen* in $L^p(\Upsilon)$ sprechen. Dies wird zu keinen Problemen führen, solange man im Hinterkopf behält, dass die so benutzten *Funktionen* nur bis auf Nullmengen eindeutig definiert sind. Insbesondere ist

$$\|u\|_{L^p(\Upsilon)} := \|[u]\|_{L^p(\Upsilon)} := \inf_{v \in [u]} \|v\|_{\mathcal{L}^p(\Upsilon)} = \|u\|_{\mathcal{L}^p(\Upsilon)}$$

mit den entsprechenden Definitionen aus (1.3) für $1 \leq p < \infty$ und (1.4) für $p = \infty$. Gelegentlich werden wir auch noch die lokalen Versionen der L^p Räume benutzen, diese sind definiert durch

$$L_{\text{loc}}^p(\Upsilon) := \left\{ u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^p(K) \text{ für jede kompakte Menge } K \subseteq \overline{\Upsilon} \right\}.$$

Grundsätzlich völlig analog können wir vektorwertige Funktionenräume, d.h. solche für Funktionen $u: \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder allgemeiner sogar $u: \Upsilon \rightarrow X$, wobei X ein Banachraum ist, definieren. Da $u(x)$ dann keine reelle Zahl, sondern ein Element eines Banachraumes ist, wird im Wesentlichen in allen Definitionen der Betrag $|u(x)|$ durch $\|u(x)\|_X$ ersetzt.² Die Notation für solche Räume ist dann $C^k(\Upsilon; X)$ bzw. $L^p(\Upsilon; X)$ und ähnliche.

1.1.3 Satz von Gauß

Ein ganz wesentliches Werkzeug wird im Folgenden der *Gaußsche Integralsatz* sein, den wir hier deshalb festhalten. Für einen Beweis verweisen wir zum Beispiel auf Arendt & Urban (2010). Die Begriffe der Randregularität wie C^1 -Rand $\partial\Omega$ für ein Gebiet Ω werden später in Abschnitt 3.2.2 genauer eingeführt. Bis dorthin genügt die Intuition, dass die zugrundeliegende Menge einen schön “glatten” Rand ohne Einschnitte oder Spitzen (nach innen oder außen) hat.

Satz 1.3: Gaußscher Integralsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Dann existiert ein eindeutig definiertes Borel-Maß σ auf $\partial\Omega$, das *Oberflächenmaß*, so dass gilt:

$$\int_{\Omega} \partial_j u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) \nu_j(x) \, d\sigma(x) \quad (u \in C^1(\overline{\Omega}), j = 1, \dots, n).$$

Hierbei ist ν_j die j -te Komponente des äußeren Normalenvektors $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ an $\partial\Omega$.

Man kann den Gaußschen Integralsatz auch für Mengen mit Lipschitz-Rand formulieren. In diesem Fall darf der Rand (gutartige) Ecken und Verzweigungen aufweisen. Die äußere Normale ν existiert dann nur noch σ -fast überall. Noch wesentlich weiter gehende Verallgemeinerungen sind ebenfalls verfügbar; dies ist ein Forschungsfeld in *Geometrischer Maßtheorie*. Dort erkennt man auch, dass das Oberflächenmaß σ im Wesentlichen durch das $(n-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß \mathcal{H}_{n-1} , eingeschränkt auf $\partial\Omega$, gegeben ist.

Wir werden den Gaußschen Integralsatz hauptsächlich in der folgenden Form benutzen:

Lemma 1.4: Green'sche Formel

Seien die Annahmen des Gaußschen Integralsatzes 1.3 erfüllt und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)] \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u(x)v(x) \, d\sigma(x) \quad (v \in C^1(\overline{\Omega})).$$

²Im Falle der Lebesgue-Räume muss man, besonders für $p = \infty$, mit der Definition von Messbarkeit etwas aufpassen; wir werden im Laufe der Vorlesung aber nicht mit Argumenten in Berührung kommen, für die diese Problematik relevant wäre.

1.1.4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bevor wir uns nun wirklich mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigen, wollen wir noch kurz einige nützliche Resultate zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wiederholen, die wir auch im Verlauf der Vorlesung noch brauchen werden.

Der einfachste Fall sind separable skalare Differentialgleichungen erster Ordnung. Hier suchen wir eine Funktion $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, die

$$u'(t) = p(u(t))q(t), \quad u(0) = u_0 \quad (1.5)$$

erfüllt, wobei p und q gegebene stetige Funktionen sind, die wenigstens auf einer Umgebung von u_0 und 0 definiert sind. Durch diese Annahme ist die Existenz mindestens einer stetig differenzierbaren Lösung u auf einem Intervall $[0, t_0]$ mit $t_0 > 0$ nach dem Satz von Peano gesichert, siehe Theorem 1.5 weiter unten. Falls $p(u_0) = 0$, ist $u \equiv u_0$ eine solche Lösung, die aber im Allgemeinen nicht eindeutig sein muss und wird.

Ist dagegen $p(u_0) \neq 0$, so können wir tatsächlich auch zeigen, dass es nur eine einzige Lösung geben kann: Sei u eine solche (stetige) Lösung. Dann gilt für t hinreichend klein, dass $p(u(t)) \neq 0$ ist, und (1.5) kann umgestellt werden:

$$\frac{u'(t)}{p(u(t))} = q(t).$$

Diese Identität können wir bezüglich t integrieren, und mit Substitution folgt

$$\int_0^s q(t) dt = \int_0^s \frac{u'(t)}{p(u(t))} dt = \int_{u_0}^{u(s)} \frac{1}{p(v)} dv.$$

Ist also P eine Stammfunktion von $\frac{1}{p}$, so folgt

$$P(u(s)) - P(u_0) = \int_0^s q(t) dt,$$

bzw.

$$u(s) = P^{-1} \left[P(u_0) + \int_0^s q(t) dt \right].$$

Man beachte dabei, dass die inverse Funktion P^{-1} von P zumindest lokal um $P(u_0)$ existiert, da die Ableitung existiert und von Null verschieden ist. (Satz von der Umkehrfunktion!) Für s hinreichend nahe an 0 ist der vorige Ausdruck also wohldefiniert und insbesondere eindeutig.

Erweiterungen skalarer Gleichungen erster Ordnung sind Gleichungen höherer Ordnung bzw. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da man höhere Ableitung durch Einführung zusätzlicher Variablen (die verschiedenen Ableitungen) und Gleichungen immer auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen kann, betrachten wir im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit solche Systeme. Diese sind allgemein von der Form

$$U'(t) = F(t, U(t)) \quad (t \in \mathbb{R}^+), \quad U(0) = U_0 \quad (1.6)$$

wobei $F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $U_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind und $U: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ gesucht wird. Die (lokale) Existenz einer Lösung eines solchen Problems ist gegeben, wenn F stetig ist:

Satz 1.5: Peano

Sei F stetig in einer Umgebung von $(0, U(0)) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$. Dann gibt es ein $t_0 > 0$ und eine auf $[0, t_0)$ stetige (vektorwertige) Funktion U , die (1.6) auf $[0, t_0)$ erfüllt.

Da im Kontext des vorigen Satzes F und U stetig sind, folgt aus der Gleichung (1.6) auch, dass U' stetig ist. Insbesondere ist U also stetig differenzierbar.

Der Beweis des Satzes von Peano benutzt den Schauder'schen Fixpunktsatz; wir werden ihn hier (noch) nicht näher diskutieren, bemerken aber, dass die Fixpunktformulierung auf der zu (1.6) äquivalenten Integralgleichung

$$U(t) = U(0) + \int_0^t F(s, U(s)) ds$$

basiert. Noch wichtiger als der Satz von Peano ist der Satz von Picard-Lindelöf, der unter stärkeren Annahmen an F auch Eindeutigkeit garantiert.

Satz 1.6: Picard-Lindelöf

Sei F stetig auf einer Umgebung V von $(0, U(0)) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ und erfülle eine Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Variable auf V , d.h.

$$\|F(t, U_1) - F(t, U_2)\| \leq L \|U_1 - U_2\| \quad ((t, U_i) \in V)$$

mit einem $L = L(V) \geq 0$. Dann gibt es ein $t_0 > 0$ und eine auf $[0, t_0)$ *eindeutige* stetig differenzierbare (vektorwertige) Funktion U , die (1.6) auf $[0, t_0)$ erfüllt.

Auch der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf basiert auf der Fixpunktformulierung mit Integraloperator. In diesem Fall wird Kontraktivität verwendet, die sich aus der (lokalen) Lipschitz-Konstante und der Kleinheit des Zeitintervalls ergibt.

Beachte, dass der Satz von Picard-Lindelöf hinreichend, aber nicht notwendig für eindeutige Lösungen ist. In der Tat haben wir oben gezeigt, dass (1.5) eine eindeutige Lösung hat, falls $p(u_0) \neq 0$ ist, ohne eine Lipschitz-Annahme an p gestellt oder implizit verwendet zu haben.

Ist F linear mit konstanten Koeffizienten, d.h. $F(t, U) = \mathbf{A}U$ mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, dann kann F klarerweise (global) Lipschitz-stetig und die eindeutige Lösung von (1.6) ist durch

$$U(t) = e^{\mathbf{A}t}U(0)$$

gegeben. Dabei ist $e^{\mathbf{A}t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ eine $m \times m$ Matrix und kann z.B. mit der üblichen Reihendarstellung der Exponentialfunktion definiert werden. Besonders einfache Darstellungen erhält man mittels Spektraltheorie. Ist zum Beispiel \mathbf{A} diagonalisierbar, gilt

$$U(t) = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t} U_i \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

mit den Eigenwerten λ_i und zugehörigen Eigenvektoren U_i von \mathbf{A} und Gewichten $c_i \in \mathbb{R}$.

Ein wichtiges Resultat, welches auch Anwendung bei partiellen Differentialgleichungen findet, ist die *Gronwall-Ungleichung*, die oft bei der Analyse von Ortsintegralen der Lösung (im Verlauf der Zeit) nützlich ist. Die grobe Form der Gronwall-Ungleichung für eine skalare Funktion u ist

$$u'(t) \leq Cu(t) \quad \implies \quad u(t) \leq e^{Ct}u(0)$$

d.h., man kann eine Funktion u , die eine Differentialungleichung erfüllt, durch die entsprechende Lösung der zugehörigen Differentialgleichung abschätzen. Präziser kann die Ungleichung über eine Integralungleichung angegeben werden :

Lemma 1.7: Gronwall Ungleichung

Seien $A \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}_+$, und sei $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die

$$u(t) \leq A + C \int_0^t u(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

erfüllt. Dann gilt

$$u(t) \leq Ae^{Ct} \quad (t \in \mathbb{R}_+). \tag{1.7}$$

Beweis. Für $C = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $C > 0$ und setze $v(t) := \int_0^t u(s) ds$. Dann gilt natürlich $v(0) = 0$ und nach Annahme

$$v'(t) \leq A + Cv(t). \tag{1.8}$$

Weiters sei $w(t) := e^{-Ct}v(t)$. Es folgt $w'(t) \leq Ae^{-Ct}$, und wegen $w(0) = 0$ auch

$$w(t) = \int_0^t w'(s) ds \leq \int_0^t Ae^{-Cs} ds = \frac{A}{C} [1 - e^{-Ct}] \quad \implies \quad v(t) = e^{Ct}w(t) \leq \frac{A}{C} [e^{Ct} - 1].$$

Einsetzen von v in (1.8) liefert (1.7). (Hier brauchen wir das Vorzeichen an $C > 0$.) □

1.2 Beispiele Partieller Differentialgleichungen

Im folgenden präsentieren wir eine Auswahl wichtiger Beispiele partieller Differentialgleichungen, um ein erstes Gefühl für typische Formen auftretender Gleichungen zu bekommen:

Transportgleichung:

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t u + \nabla \cdot (bu) = 0$$

Laplace-Gleichung:

$$-\Delta u = 0$$

Poisson-Gleichung:

$$-\Delta u = f$$

Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung:

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

Wellengleichung:

$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0$$

Fokker-Planck Gleichung:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a(\nabla u - u\nabla V)) = 0$$

Schrödinger Gleichung:

$$-i\varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2\Delta u + Vu = 0$$

Liouville-Gleichung:

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^N v_j \cdot \nabla_{x_j} u + \sum_{j=1}^N F(x_j) \cdot \nabla_{v_j} u = 0$$

Boltzmann-Gleichung:

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + F(x) \cdot \nabla_v u = Q(u, u)$$

Vlasov-Gleichung:

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + \int \int \nabla g(x-y) u(y, w, t) dy dw \cdot \nabla_v u = 0$$

Hamilton-Jacobi Gleichung:

$$\partial_t u + H(x, t, \nabla u) = 0$$

Eikonal-Gleichung:

$$|\nabla u| = 1$$

Skalare Erhaltungsgleichung:

$$\partial_t u + \nabla \cdot (F(u)) = 0$$

Burgers-Gleichung:

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0$$

Reaktions-Diffusionsgleichung:

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) = 0$$

Biharmonische Gleichung:

$$\Delta\Delta u = 0$$

p -Laplace Gleichung:

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

Monge-Ampere Gleichung:

$$\det(\nabla^2 u) = f$$

Porous-Medium Gleichung:

$$\partial_t u - \nabla \cdot (u^\gamma \nabla u) = 0$$

Total Variation Flow:

$$\partial_t u - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0$$

Dazu noch einige wichtige Systeme:

Lame-Gleichungen der linearen Elastizität:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_t \mathbf{E} - \operatorname{curl} \mathbf{B} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Stokes-System:

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla p = f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} - \nabla p = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Poisson-Nernst-Planck Gleichungen:

$$-\Delta V - \sum_i z_i u_i = f$$

$$\partial_t u_i - \Delta u_i - \nabla \cdot (z_i u_i \nabla V) = 0$$

Patlak-Keller-Segel Modell:

$$\partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla S) = 0$$

$$\partial_t S - \Delta S + S - u = 0$$

1.3 Partielle Differentialgleichungen: Wie und was?

Im Laufe der Vorlesung werden wir verschiedene Herangehensweisen an partielle Differentialgleichungen und verschiedenste Fragestellungen kennen lernen. Einige Grundansätze wollen wir im Folgenden kurz andiskutieren.

Die erste Frage, die wir an jede Gleichung stellen, ist jene nach der *Wohlgestelltheit* des Problems (*wellposedness*). Nach Hadamard ist ein Problem wohlgestellt, wenn eine Lösung existiert, die eindeutig ist und stetig von den Daten abhängt. Dafür ist es oft nötig, die korrekte Art einer Lösung zu definieren. Die einfachste Möglichkeit dabei sind *klassische Lösungen*, d.h. k -mal differenzierbare Funktionen, die, eingesetzt in (1.2), die Gleichung tatsächlich punktweise erfüllen. In vielen Fällen, vor allem bei nichtlinearen Problem, ist es *nicht* möglich, klassische Lösungen zu finden. Es ist dann nötig, allgemeinere Lösungskonzepte zu definieren, wie zum Beispiel *schwache Lösungen*. Einige solcher Konzepte werden wir noch näher diskutieren.

Grundsätzlich gilt die grobe Richtlinie: Je allgemeiner das Lösungskonzept, desto einfacher ist es, *Existenz* einer Lösung zu zeigen, aber desto schwerer wird es, *Eindeutigkeit* und stetige Abhängigkeit von den gegebenen Daten zu erhalten. Der Königsweg ist es also, ein Konzept zu finden, in dem beide Aspekte verfügbar und erreichbar sind.

Neben der grundlegenden Fragestellung der Existenz und Eindeutigkeit sind noch einige weitere Untersuchungen zur Lösung interessant, falls möglich:

- Die Berechnung expliziter Lösungen,
- Lösungsformeln, z.B. als Integraldarstellungen,
- Symmetrie- und Skalierungseigenschaften der Gleichung bzw. der Lösung,
- lokale Eigenschaften von Lösungen, z.B. Charakteristiken oder Maximumprinzipien, insbesondere auch Regularität, sprich, wie differenzierbar oder integrierbar sind Lösungen,
- globale Eigenschaften von Lösungen, z.B. Erhaltungsgrößen oder Schranken an gewisse Integrale der Lösung, und
- asymptotische Eigenschaften von Lösungen bei Konvergenz eines Parameters gegen Null, oder der Zeitvariable gegen Unendlich.

Manche dieser Fragestellungen werden wir im Laufe der Vorlesung berühren, andere werden erst in weiterführenden Vorlesungen behandelt.

2 Grundlegende partielle Differentialgleichungen

Im folgenden werden wir als Einführung vier wichtige Beispiele partieller Differentialgleichungen untersuchen und dabei auch die wesentlichsten Konzepte (die im weiteren Verlauf der Vorlesung noch detaillierter besprochen werden) kennen lernen. Dies sind die *lineare Transportgleichung*, die *Poisson-Gleichung*, die *Wärmeleitungsgleichung* und die *Wellengleichung*.

2.1 Lineare Transportgleichung

Wir beginnen mit der *Transportgleichung*, die den kanonischen Fall einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung darstellt. Sei dazu zunächst $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge. Die Bezeichnung Transportgleichung ist in der Literatur nicht komplett eindeutig: Für ein gegebenes Vektorfeld $b: U \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird sowohl

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0 \quad \text{in } U \times \mathbb{R}_+, \quad (2.1)$$

als auch

$$\partial_t u + \nabla \cdot (bu) = 0 \quad \text{in } U \times \mathbb{R}_+ \quad (2.2)$$

als *Transportgleichung* (auf U) bezeichnet. Diese beiden Gleichungen stimmen mittels der Produktregel für $\nabla \cdot (bu)$ formell für $\nabla \cdot b = 0$ überein, insbesondere also für (bezüglich x) konstante Vektorfelder b . Wir werden hier beide Fälle betrachten, die sich aber mit ähnlichen Methoden behandeln lassen.

Wie man sofort sieht, kann die Lösung aus der Gleichung alleine nicht eindeutig bestimmt sein, da man durch Addition einer Konstanten zu einer Lösung u immer eine neue Lösung von (2.1) erhält. Deshalb benötigt man zusätzliche Bedingungen am Rand des Gebiets (*Randbedingungen*, *boundary conditions*), in diesem Fall am Rand des Raum-Zeit Zylinders $U \times \mathbb{R}_+$. Zur Vereinfachung werden wir hier nur den Fall $U = \mathbb{R}^n$ betrachten, und somit nur Anfangsbedingungen bei $t = 0$ stellen müssen, d.h. wir fordern, dass

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

gelten soll. Wir nehmen hier an, dass u_0 stetig differenzierbar ist.

2.1.1 Methode der Charakteristiken

Die Charakteristikenmethode für partielle Differentialgleichungen basiert darauf, die Gleichung entlang geeigneter Kurven zu betrachten, entlang denen die Gleichung einfacher ist. Wir starten mit Gleichung (2.1), deren linke Seite wir alternativ auch als

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = c \cdot Du \quad \text{mit} \quad c := (b, 1): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad (2.3)$$

schreiben können. In (2.3) suchen wir also eine Funktion im $(n + 1)$ -dimensionalen Raum, deren Gradient normal auf dem Vektorfeld c steht. Die kritische Beobachtung ist nun, dass ein Ausdruck der Form $\gamma' \cdot (Du \circ \gamma)$ entsteht, wenn man u entlang einer Kurve $s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ betrachtet und ableitet. Finden wir also eine (stetig differenzierbare) Kurve

$$\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad \gamma(s) = (\xi(s), \tau(s)),$$

mit Tangentialvektor $\gamma' = c \circ \gamma$, so ergibt sich für jede (!) stetig differenzierbare Funktion $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mittels der Kettenregel:

$$\frac{d}{ds} [u(\gamma(s))] = \underbrace{(\xi'(s), \tau'(s))}_{=\gamma'(s)} \cdot Du(\gamma(s)) = c(\gamma(s)) \cdot Du(\gamma(s)). \quad (2.4)$$

Die Bedingung, dass c tangential zur Kurve sein muss, ist ausgeschrieben

$$(\xi'(s), \tau'(s)) = \gamma'(s) \stackrel{!}{=} c(\gamma(s)) = (b(\xi(s), \tau(s)), 1).$$

Dies wird auch als *charakteristische Gleichung* bezeichnet, und das assoziierte γ bzw. ξ als *charakteristische Kurve* oder auch *Charakteristik*.

Wegen der speziellen Gestalt des Vektorfelds c kann ein Teil der charakteristischen Gleichung direkt gelöst werden, nämlich $\tau'(s) = 1$. Es folgt somit $\tau(s) = s + \alpha$ mit einer noch zu bestimmenden Konstante α , die aber nur von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Beachten wir, dass unsere Anfangsmannigfaltigkeit bei $t = 0$ liegt, so ist es naheliegend, die Kurven auch dort beginnen zu lassen. Wir wählen also $\tau = 0$ für $s = 0$ und, umgekehrt, $\alpha = 0$. Wir können also die Charakteristiken in diesem Fall auch direkt über die Zeitvariable τ parametrisieren, die wir dann auch wieder t nennen. Es verbleibt die *charakteristische Gleichung*

$$\xi'(t) = b(\xi(t), t) \quad (t \in \mathbb{R}_+). \quad (2.5)$$

Mit einer (2.5) erfüllenden Charakteristik ξ und (2.4) ist nun ersichtlich, dass die Transportgleichung (2.1) entlang γ äquivalent ist zu

$$\frac{d}{dt} [u(\xi(t), t)] = \left[(\partial_t u + b \cdot \nabla u) \circ \gamma \right] (t) \stackrel{!}{=} 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Wie berechnen wir nun also konkret die Lösung u an einem bestimmten Punkt $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$? Dazu nutzen wir die Charakteristik durch (x, t) , d.h. die Lösung des folgenden Endwertproblems parametrisiert durch (x, t) :

$$\varphi(t) = x, \quad \varphi'(s) = b(\varphi(s), s) \quad (0 \leq s \leq t). \quad (2.6)$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Lösung dieses Problems, wenn das Vektorfeld b stetig ist und eine Lipschitz-Bedingung bezüglich x erfüllt. Wir nennen diese Lösung $\xi(\cdot; x, t)$ und setzen

$$u(x, t) := u_0(\xi(0; x, t)). \quad (2.7)$$

Klarerweise ist $u(x, 0) = u_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Weiter ist mit dieser Definition $t \mapsto u(\xi(t; x, t), t) = u_0(\xi(0; \xi(t; x, t), t))$ konstant für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ (Eindeutigkeit der Lösung von (2.6)!) und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}[u(\xi(t; x, t), t)] = 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+). \quad (2.8)$$

Wie oben gesehen, impliziert dies, dass das konstruierte u Lösung der Transportgleichung (2.1) ist. Umgekehrt gilt (2.8) für jede stetig differenzierbare Lösung u von (2.1), woraus (2.7) folgt.

Damit haben wir unser erstes Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, basierend auf einer beinahe expliziten Lösungsdarstellung:

Satz 2.1

Sei $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $b \in C_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ erfülle eine (globale) Lipschitz-Bedingung bezüglich der ersten Variable. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ von (2.1), die durch

$$u(x, t) = u_0(\xi(0; x, t)), \quad \xi(\cdot; x, t) := \varphi, \quad \begin{cases} \varphi(t) = x, \\ \varphi'(s) = b(\varphi(s), s) \quad (0 \leq s \leq t) \end{cases} \quad (2.9)$$

berechnet werden kann.

Wir betrachten nun ein einfaches Beispiel. Weitere werden wir in den Übungen kennen lernen.

Beispiel

Wir lösen die Transportgleichung (2.1) im Fall eines konstanten Vektorfelds b . Die Charakteristiken sind dann durch

$$\xi(t; x, t) = x, \quad \xi'(s; x, t) = b \quad (0 \leq s \leq t) \quad \iff \quad \xi(s; x, t) = x - b(t - s)$$

gegeben. Damit erhalten wir aus (2.9) die Darstellung

$$u(x, t) = u_0(x - bt).$$

Die Lösung zur Zeit t ist also nur eine Verschiebung des Anfangswerts in Richtung des Vektors b , was auch den Namen *Transportgleichung* erklärt.

Analog können wir auch zur Lösung von (2.2) vorgehen. Dazu schreiben wir die Gleichung als

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u = -(\nabla \cdot b)u.$$

Mit den Charakteristiken (2.6) wie im vorigen ergibt sich entlang jeder stetig differenzierbaren Kurve $s \mapsto \gamma(s) = (\xi(s), s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ äquivalent:

$$\frac{d}{ds} [u(\xi(s), s)] = -(\nabla \cdot b)(\xi(s), s)u(\xi(s), s).$$

In diesem Fall ist die Charakterisierung also nicht, dass $s \mapsto u(\xi(s), s)$ konstant ist, sondern dass es die vorige gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt. Entsprechend bietet es sich an, eine zusätzliche Charakteristik $\phi(\cdot; x, t)$ parametrisiert über $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ als Lösung von

$$\phi'(s) = -(\nabla \cdot b)(\xi(s; x, t), s)\phi(s), \quad \phi(0) = u_0(\xi(0; x, t)) \quad (2.10)$$

einzuführen. Glücklicherweise ist diese zusätzliche Differentialgleichung eine lineare, separable und skalare Gleichung erster Ordnung, die gelöst werden kann, nachdem man ξ berechnet hat. Dies liegt daran, dass die Transportgleichung (2.2) linear war. Im einer nichtlinearen Verallgemeinerung kann es, wie wir noch sehen werden, dazu kommen dass die Differentialgleichung für ϕ nichtlinear und voll mit der Gleichung für ξ gekoppelt wird.

Tatsächlich ist für jedes $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ die Funktion $s \mapsto -(\nabla \cdot b)(\xi(s; x, t), s)$ stetig, sobald $\nabla \cdot b \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ gilt. (Man beachte, dass die Charakteristiken $\xi(\cdot; x, t)$ als Lösungen von (2.6) sogar stetig differenzierbar sind.) Damit lässt sich die zusätzliche Charakteristik $\phi(\cdot; x, t)$ als Lösung von (2.10) nun relativ einfach mittels des Vorgehens aus Abschnitt 1.1.4 berechnen; wir erhalten

$$\phi(s; x, t) = u_0(\xi(0; x, t))e^{A(s; x, t)} \quad \text{mit} \quad A(s; x, t) := -\int_0^s (\nabla \cdot b)(\xi(\sigma; x, t), \sigma) d\sigma.$$

Nun ist

$$u(x, t) := \phi(t; x, t) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \quad (2.11)$$

die eindeutige Lösung der Transportgleichung (2.2).

2.1.2 Eigenschaften der Lösung

Wir diskutieren nun noch einige strukturelle Eigenschaften der Lösungen von Transportgleichungen. Dabei beginnen wir wieder mit (2.1). Aus der Lösungsformel (2.9) sehen wir, dass u für $t > 0$ nur Funktionswerte annehmen kann, die auch schon zur Zeit $t = 0$ angenommen wurden, d.h.

$$\text{Bild } u(\cdot, t) \subseteq \text{Bild } u_0 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Daraus folgt auch ein *Maximumprinzip* für jedes $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u_0(x).$$

Das Minimum und Maximum von u werden also, falls sie existieren, bereits zur Zeit $t = 0$ (also am Rand des Raum-Zeit Gebiets) angenommen. Wir werden sehen, dass diese Eigenschaft auch für viele andere partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung gilt.

Neben dem Maximumprinzip erhalten wir auch eine *Stabilitätseigenschaft* in der Supremumsnorm, d.h. es gilt

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Diese kann, wegen der Linearität von (2.1), sofort in eine *Kontraktivitätseigenschaft* der Evolutionsgleichung übersetzt werden. Sind u und v die jeweils eindeutigen Lösungen von (2.1) zu den Anfangswerten u_0 bzw. v_0 , so folgt aus der Linearität, dass $u - v$ eine Lösung mit Anfangswert $u_0 - v_0$ ist. Also erhalten wir aus der Stabilitätseigenschaft direkt

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Im Fall von (2.2) können wir kein Maximumprinzip erwarten, da der Exponentialterm in der Lösungsdarstellung (2.11) im Allgemeinen wachsen kann. Wir sehen aber, dass wir ein Maximumprinzip und ∞ -Norm-Stabilität unter der Bedingung

$$(\nabla \cdot b)(x, t) \geq 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$

gilt.

Im Fall von Integralen der Lösung u sieht das Verhalten umgekehrt aus. Im Fall von (2.2) werden wir sehen, dass der Mittelwert von u immer erhalten bleibt, falls u für $|x| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abfällt. Dies folgt aus

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u)(x, t) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot bu)(x, t) \, dx \quad (2.12)$$

und dem Gaußschen Satz (**divergence theorem**), da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot bu)(x, t) \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} (\nabla \cdot bu)(x, t) \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R(0)} (bu)(x, t) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R(0)} (bu)(x, t) \cdot \frac{x}{R} \, d\sigma(x). \end{aligned}$$

Hier ist ν die äußere Normale an $B_R(0)$ und σ das Oberflächenmaß auf $\partial B_R(0)$.¹ Nun ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_R(0)} (bu)(x, t) \cdot \frac{x}{R} \, d\sigma(x) \right| &\leq \omega_n R^{n-1} \sup_{x \in \partial B_R(0)} |b(x, t)u(x, t)| \\ &\leq \omega_n \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} (|b(x, t)| |u(x, t)| |x|^{n-1}) \end{aligned}$$

wobei die Konstante $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2})$ das Maß $\sigma(\partial B_1(0))$ der Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^n bezeichnet. Der Grenzwert und damit die Ableitung in (2.12) ist also Null, wenn

$$(bu)(x, t) |x|^{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Für (2.1) gilt dies nur, wenn $\nabla \cdot b = 0$ ist—und dann sind die Transportgleichungen gleich—, da man sonst ein zusätzliches Integral in der Identität erhält, das sich nicht leicht wegdiskutieren

¹Dies entspricht dem $(n-1)$ -dimensionalen Hausdorffmaß \mathcal{H}_{n-1} auf $\partial B_R(0)$, misst also “ $(n-1)$ -dimensionalen Inhalt”.

lässt. Wir werden sehen, dass die Erhaltung des Mittelwerts eine typische Eigenschaft von Gleichungen in Divergenz-Form, d.h. der Form

$$\partial_t u + \nabla \cdot J = 0$$

für ein Vektorfeld J , den *Fluss* (flux), ist.

Für (2.2) können wir allgemeiner das Verhalten von Integralen über Funktionen von u untersuchen. Genauer, mit einer stetig differenzierbaren Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und der sinnvollen Normierung $F(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x, t)) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x, t)) (\partial_t u)(x, t) \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x, t)) (\nabla \cdot bu)(x, t) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot b(x, t)) H(u(x, t)) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot [b(x, t) F(u(x, t))] \, dx, \end{aligned}$$

wobei $H(v) := F(v) - vF'(v)$. Fällt $x \mapsto b(x, t)F(u(x, t))$ wieder hinreichend schnell für jedes $t \in \mathbb{R}_+$, dann verschwindet der zweite Term wie oben und wir verbleiben mit

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x, t)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot b)(x, t) H(u(x, t)) \, dx.$$

Beachte, dass F genau dann konvex ist, wenn $H(v) \leq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Also ist für *konvexes* F die Integral-Evolution

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x, t)) \, dx$$

monoton fallend und damit beschränkt, falls $\nabla \cdot b \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ gilt. In der Praxis sind hier auch besonders die Exponentialfunktionen $F_p(v) := |v|^p$ für $1 \leq p < \infty$ interessant², da damit

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_p(u(x, t)) \, dx = \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p$$

gilt. Ist $\nabla \cdot b \leq 0$, so erhält man eine analoge Aussage für konkave F .

2.2 Poisson-Gleichung

Wir untersuchen im Folgenden die *Poisson-Gleichung* auf (zunächst) einer nichtleeren offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine Funktion $u: U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U \tag{2.13}$$

mit einer Funktion (Quellterm) $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Im Fall $f \equiv 0$ nennt man (2.13) auch *Laplace-Gleichung*. Eine Lösung $u \in C^2(U)$ der Laplace-Gleichung nennt man häufig auch *harmonisch*. Beachte, dass zum Beispiel insbesondere Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion $u: \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$ harmonisch sind, wenn man \mathbb{C} und \mathbb{R}^2 identifiziert. (Entsprechend wäre für dieses Beispiel $n = 2$.) Holomorphe Funktionen haben viele gute Eigenschaften und wir werden sehen, dass einige davon ihren Ursprung darin haben, dass holomorphe Funktionen eben harmonisch im vorigen Sinne sind.

²Im Fall $p = 1$ muss hier, der Korrektheit halber, die Betragsfunktion zunächst mit (stetig) differenzierbaren Funktionen approximiert werden.

2.2.1 Lösungsdarstellung

Wir beginnen mit der Laplace-Gleichung in $U = \mathbb{R}^n$ und suchen zunächst eine rotationssymmetrische Lösung, d.h. wir setzen an:

$$u(x) = v(r), \quad r = r(x) := |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Wegen

$$(\partial_{x_i} r)(x) = \frac{x_i}{r}$$

folgt mit der Kettenregel

$$\partial_{x_i} u(x) = v'(r) \frac{x_i}{r} \quad \text{und} \quad \partial_{x_i x_i}^2 u(x) = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Also erhalten wir die Transformation des Laplace-Operators als

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \tag{2.14}$$

für $|x| = r > 0$. Die rotationssymmetrische Laplace-Gleichung kann dann also als (separable) gewöhnliche Differentialgleichung für $w := v'$ geschrieben werden, nämlich

$$w'(r) = \frac{1-n}{r} w(r).$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$w(r) = v'(r) = e^{\alpha r^{1-n}}$$

mit einer Konstanten α . Als nächsten Schritt erhalten wir dann die Lösung

$$v(r) = \begin{cases} \beta \log r + \gamma & \text{für } n = 2, \\ \beta r^{2-n} + \gamma & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

mit Konstanten β und γ . Klarerweise sind konstante Funktionen bereits Lösungen der Laplace-Gleichung auf \mathbb{R}^n , was durch den Summanden γ repräsentiert wird. Wir interessieren uns aber eher für den nicht-konstanten Teil und setzen daher $\gamma = 0$. Da weiterhin jedes Vielfache von v offensichtlich wieder eine Lösung liefert, kann $\beta \neq 0$ beliebig gewählt werden. Wir treffen die folgende spezielle Wahl:

Definition 2.2: Grundlösung/Fundamentallösung

Die Funktion

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} |x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \end{cases} \quad (x \neq 0) \tag{2.15}$$

heißt *Grundlösung* oder *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung. Hierbei ist $\alpha_n := |B_1(0)| = \pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n .

Wir konstruieren eine Lösung für die Poisson-Gleichung (2.13) aus dieser Fundamentallösung. Dies wird im wesentlichen einer Art *Variation der Konstanten* Ansatz entsprechen.

Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ ist $\Phi(\cdot - y)$ immer eine Lösung der Laplace-Gleichung, also harmonisch, in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Das gilt ebenfalls für $\Phi(\cdot - y)f(y)$ und beliebige (endliche) Linearkombinationen solcher Terme. Integrieren wir diese nun über y , so erhalten wir die *Faltung* (*convolution*) von f mit der Grundlösung Φ , als Funktion in x :

$$u(x) := (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x - y) dy = (f * \Phi)(x). \quad (2.16)$$

Diese Funktion nennt man auch *Newton'sches Potential* (mit Dichte f). Es ist naheliegend, $\Delta u = 0$ zu vermuten, da wir den Laplace-Operator und das Integral vertauschen könnten. Dies ist allerdings *falsch*, da wir wegen der Singularität bei $y = x$ diese Vertauschung eben *nicht* durchführen dürfen! Es stellt sich hingegen heraus, dass in einem verallgemeinerten, aber präzisen Sinn

$$-\Delta\Phi = \delta$$

gilt, wobei δ die Dirac- δ -Distribution bezeichnet. Diese ist durch $\delta(g) := g(0)$ für $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert und realisiert das Einselement der Faltung. Damit ist (zunächst als formale Rechnung!)

$$-\Delta u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\Phi(x - y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - y)f(y) dy = (\delta * f)(x) = f(x).$$

Also definiert (2.16) eine Lösung der Poisson-Gleichung. Dies werden wir im Folgenden rigoros beweisen, wenn f zweimal stetig differenzierbar mit kompaktem Träger ist:

Satz 2.3

Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, und sei u definiert durch (2.16). Dann gilt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und u löst die Poisson-Gleichung (2.13).

Beweis. Wir nutzen den Differenzenquotienten in die i -te Einheitsrichtung für die Darstellung $u = f * \Phi$ in (2.16):

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \right] dy.$$

Da f als stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde, gilt

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\partial_{x_i} f)(x - y)$$

gleichmässig auf dem kompakten Träger von f ; außerhalb des Trägers sind Differenzenquotient und Ableitung tatsächlich gleich, da beide verschwinden. Mit dieser gleichmäßigen Konvergenz darf der Grenzwert $h \rightarrow 0$ mit dem Integral vertauscht werden und es folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{x_i} f(x - y) dy.$$

Daraus folgt die Differenzierbarkeit von u .³ Wenden wir ein analoges Verfahren auf $\partial_{x_i} u$ an, so erhalten wir die Existenz zweiter Ableitungen, gegeben durch

$$\partial_{x_i x_j}^2 u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{x_i x_j}^2 f(x-y) dy.$$

Da f kompakten Träger hat, folgt die Stetigkeit der Integrale bezüglich x auf den rechten Seiten der vorigen Gleichungen leicht. (Wenn $x_k \rightarrow x$, konvergiert $f(x_k - y)$ *gleichmäßig* gegen $f(x - y)$, da man sich immer auf den kompakten Träger beziehen darf.) Damit folgt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Weiters erhalten wir

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy.$$

Wir wollen um die Singularität von Φ in 0 herumarbeiten, um zu nutzen, dass Φ harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist. Dazu teilen das vorige Integral entlang der Kugel $B_\varepsilon(0)$ für $\varepsilon > 0$ auf:

$$\Delta u(x) = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{=: I(\varepsilon)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy}_{=: J(\varepsilon)}.$$

Der übergeordnete Plan ist, im $J(\varepsilon)$ Integral den Laplace-Operator mittels partieller Integration auf die Fundamentallösung Φ zu transferieren. Wir dazu nehmen im weiteren ε klein an und handeln die Terme einzeln ab.

1. Den ersten Term $I(\varepsilon)$ können wir mit $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ und Transformation in Polarkoordinaten abschätzen:

$$|I(\varepsilon)| \leq \|\Delta f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| dy = \|\Delta f\|_\infty \omega_n \int_0^\varepsilon |\Phi(r)| r^{n-1} dr.$$

Für das letztere Integral folgt, zunächst für $n = 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon |\Phi(r)| r^{n-1} dr &= -C_2 \int_0^\varepsilon r \log(r) dr \\ &= \lim_{\delta \searrow 0} \frac{C_2}{4} \left[r^2 (1 - 2 \log(r)) \right]_{r=\delta}^{r=\varepsilon} = \frac{C_2}{4} \varepsilon^2 (1 - 2 \log(\varepsilon)), \end{aligned}$$

und für $n = 3$:

$$\int_0^\varepsilon |\Phi(r)| r^{n-1} dr = C_n \int_0^\varepsilon r dr = \frac{C_n}{2} \varepsilon^2,$$

wobei C_2 und C_n dimensionsabhängige Konstanten aus der Definition von Φ sind. Insbesondere gilt $I(\varepsilon) \rightarrow 0$ wenn $\varepsilon \searrow 0$.

2. Für den zweiten Term $J(\varepsilon)$ erhalten wir mit partieller Integration (Green'sche Formel) und weiterer Aufteilung

$$J(\varepsilon) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla f(x-y) dy}_{=: K(\varepsilon)} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_\nu f(x-y) d\sigma(y)}_{=: L(\varepsilon)}.$$

Achtung:

³Tatsächlich haben wir gerade die höchst nützliche Eigenschaft der Faltung bewiesen, dass allgemeiner $\partial_{x_i}(h * g) = h * (\partial_{x_i} g)$ für eine große Klasse Funktionen h, g gilt.

- Die *äußere* Normale ν , die in $L(\varepsilon)$ vorkommt, bezieht sich hier auf $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$, sie ist also gegeben durch $\nu(y) := -y/|y| = -y/\varepsilon$ für $y \in \partial B_\varepsilon(0)$ und zeigt entsprechend ins *Innere* von $B_\varepsilon(0)$. Das wird gleich noch relevant.
- Die korrekte Rechtfertigung für die Anwendung der Green'schen Formel (bzw. dem Satz von Gauß) ist, dass das Integral in $J(\varepsilon)$ als ein Integral über eine hinreichend große Kugel $B_R(0)$ betrachtet werden kann, die die kompakte Menge $\text{supp } f$ strikt beinhaltet. Dort gelten die angesprochenen Integralsätze, und die zu $\partial B_R(0)$ gehörenden Randintegrale sind 0 und tauchen nicht weiter auf. Wir werden solche Argumente im Folgenden häufig (stillschweigend) verwenden.

In jedem Fall schätzen wir zunächst $L(\varepsilon)$ ähnlich zu $I(\varepsilon)$ ab:

$$|L(\varepsilon)| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)| \, d\sigma(y) = \begin{cases} C_2 |\log \varepsilon| \varepsilon & (n = 2), \\ C_n \varepsilon & (n \geq 3), \end{cases}$$

wieder mit dimensionsabhängigen Konstanten C_2, C_n , die nicht notwendig die gleichen wie zuvor sind. Auch hier folgt also $L(\varepsilon) \rightarrow 0$ wenn $\varepsilon \searrow 0$.

3. Nun nutzen wir, dass Φ in $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ harmonisch ist. Dazu unterziehen wir $K(\varepsilon)$ einer weiteren partiellen Integration mittels Green'scher Formel und beachten wieder, dass sich die äußere Normale ν auf $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ bezieht:

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \Phi(y) f(x-y) \, dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_\nu \Phi(y) f(x-y) \, d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(y) \cdot \left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x-y) \, d\sigma(y). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass für $y \in \partial B_\varepsilon(0)$ wegen $n\alpha_n = \omega_n$ gilt:

$$\nabla \Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha_n} \frac{y}{|y|^n} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{y}{\varepsilon^n},$$

und damit

$$\nabla \Phi(y) \cdot \left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{-1}{\omega_n} \frac{|y|^2}{\varepsilon^{n+1}} = \frac{-1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

Da $\omega_n \varepsilon^{n-1}$ gerade das Oberflächenmaß des Randes einer jeden ε -Kugel in \mathbb{R}^n ist, folgt

$$K(\varepsilon) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y) \, d\sigma(y) := \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y) \, d\sigma(y) = - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z) \, d\sigma(z).$$

Es ergibt sich insgesamt

$$\Delta u(x) = - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z) \, d\sigma(z) = -f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei der gemittelte Integral-Grenzwert genau $f(x)$ ergibt, weil f stetig angenommen war. Also löst u tatsächlich die Poisson-Gleichung (2.13) für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Bemerkung

Satz 2.3 gilt auch unter wesentlich schwächeren Regularitätsanforderungen an f ; z.B. genügt Hölder-Stetigkeit. Allerdings ist reine (gleichmäßige) Stetigkeit, die man vielleicht als optimale Annahme erwarten würde, *nicht* genug. Wir verweisen auf Gilbarg & Trudinger, Kapitel 4.1 und die Übungen.

Wir wechseln nun auf eine beschränkte (nichtleere) offene Menge $U \subsetneq \mathbb{R}^n$. Hier gilt die Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung als Newton'sches Potential im Allgemeinen nicht, da der Rand ∂U von U noch Einfluss nehmen wird. Nehmen wir an, dass U so ist, dass man den Satz von Gauß benutzen darf, und sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine gegebene Funktion. Dann kann man mit den Argumenten aus dem Beweis von Satz 2.3 die folgende Darstellung für $x \in U$ beweisen:

$$u(x) = \int_{\partial U} [\Phi(y-x)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu \Phi(y-x)] d\sigma(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y) dy \quad (2.17)$$

(Wir hätten diese Darstellung auch als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen für $U = \mathbb{R}^n$ wählen können.) Beachte, dass diese Darstellung mit (2.16) konsistent ist.

Wir wollen nun das folgende *Dirichlet-Problem*⁴ mit gegebenen Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) & (x \in U), \\ u(x) &= g(x) & (x \in \partial U). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Die Darstellung (2.17) würde als Lösungsformel für (2.18) dienen können, indem wir Δu auf U durch f und u auf ∂U durch g ersetzen, wenn in der Darstellung nicht die Normalenableitung $\partial_\nu u$ vorkommen würde. Diese kennen wir nicht. Um sie loszuwerden, suchen wir einen Korrektor $\phi(\cdot; x)$ parametrisiert durch $x \in U$ als Lösung von

$$\left. \begin{aligned} -[\Delta \phi(\cdot; x)](y) &= 0 & (y \in U), \\ \phi(y; x) &= \Phi(y-x) & (y \in \partial U). \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Dieser Korrektor erfüllt (Green'sche Formel)

$$-\int_U \phi(y; x)\Delta u(y) dy = \int_{\partial U} [u(y)[\partial_\nu \phi(\cdot; x)](y) - \Phi(y-x)\partial_\nu u(y)] d\sigma(y) \quad (2.20)$$

und führt uns zu folgender Definition:

Definition 2.4: Green-Funktion

Die *Green-Funktion* G für U ist gegeben durch

$$G(x, y) := \Phi(y-x) - \phi(y; x) \quad (x, y \in U, x \neq y).$$

mit der Fundamentallösung Φ und dem Korrektor ϕ wie in (2.15) und (2.19)

⁴Die Randbedingung der Form $u = \dots$ auf ∂U wird *Dirichlet-Randbedingung* genannt; entsprechend nennen wir das gegebene Poisson-Problem auch Dirichlet-Problem.

Mit (2.17) und (2.20) folgt also, dass für jede Funktion $u \in C^2(\bar{U})$ gilt:

$$u(x) = - \int_{\partial U} u(y) [\partial_\nu G(x, \cdot)](y - x) d\sigma(y) - \int_U G(y) \Delta u(y) dy \quad (x \in U),$$

und insbesondere:

Satz 2.5

Sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems (2.18). Dann ist

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) [\partial_\nu G(x, \cdot)](y - x) d\sigma(y) + \int_U G(y) f(y) dy \quad (x \in U).$$

Die Krux des an sich schönen Satzes 2.5 ist natürlich das Bestimmen des Korrektors ϕ . Dies ist im Allgemeinen nur für spezielle Gebiete wie u.a. Halbräume, Kugeln oder Quader möglich. Wir verweisen z.B. auf Evans, Kapitel 2.2.4 b).

2.2.2 Eigenschaften der Lösung

Eine wichtige Eigenschaft harmonischer Funktionen, d.h. von Lösungen der Laplace-Gleichung, ist die *Mittelwerteigenschaft*:

Satz 2.6: Mittelwerteigenschaft

Sei $u \in C^2(U)$ harmonisch in U . Sei $x \in U$ und $R > 0$ so, dass $B_R(x) \subset U$. Dann gilt

$$u(x) = \int_{B_R(x)} u(y) dy = \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma(y). \quad (2.21)$$

Beweis. Für $0 < r \leq R$, setze

$$\phi(r) := \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) d\sigma(z).$$

Dann gilt mit der Kettenregel und dem Gaußschen Integralsatz, sowie Differentiation unter dem Integralzeichen:

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z d\sigma(z) = \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r} \right) d\sigma(y) \\ &= \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \nu(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Damit ist ϕ konstant und es folgt $\phi(r) = \phi(R)$ für alle $0 < r \leq R$, insbesondere

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \phi(R) = \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma(y)$$

sowie

$$u(x) = \phi(R) = \frac{1}{R} \int_0^R \phi(r) \, dr = \frac{1}{R} \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, d\sigma(y) \, dr = \int_{B_R(x)} u(y) \, d\sigma(y).$$

□

Bemerkung 2.7

Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung der Mittelwertformel, d.h. eine Funktion ist tatsächlich genau dann harmonisch, wenn sie für alle in Ω enthaltenen Kugeln die Mittelwertformel (2.21) erfüllt.

Aus der Mittelwerteigenschaft erhalten wir sofort einige weitere strukturelle Eigenschaften harmonischer Funktionen, unter anderem das *Maximumprinzip*, das in diesem Fall sogar stärker als die entsprechende Eigenschaft für Lösungen der Transportgleichung ist.

Satz 2.8: Starkes Maximumprinzip

Sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ harmonisch in U . Dann gilt:

(i) Wenn U beschränkt ist, folgt

$$\max_{x \in \bar{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x).$$

(ii) Ist U zusammenhängend, also ein Gebiet, und existiert ein Punkt x_0 im Inneren von U mit

$$u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x),$$

dann ist u konstant in U .

Beweis. Wir beweisen (ii), da (i) direkt daraus folgt, indem man die Zusammenhangskomponenten einzeln betrachtet; die betrachteten Maxima müssen global existieren, da \bar{U} in diesem Fall kompakt ist und $u \in C(\bar{U})$ angenommen ist.

Sei also $x_0 \in U$ ein Maximum von u , d.h. $u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x) = M$. Wähle $R > 0$, so dass $B_R(x_0) \subset U$. Dann gilt mit der Mittelwerteigenschaft aus Satz 2.6:

$$M = u(x_0) = \int_{B_R(x_0)} u(y) \, dy \leq M.$$

Daraus folgt $u \equiv M$ in $B_R(x_0)$. Also ist die Menge $\{x \in U : u(x) = M\}$ offen und natürlich auch nichtleer. Wegen der Stetigkeit von u ist diese Menge aber auch (relativ) abgeschlossen in U , und da U als zusammenhängend angenommen ist, sind diese beiden Eigenschaften gleichzeitig nur möglich, wenn schon $U = \{x \in U : u(x) = M\}$ gilt. Also ist u konstant. □

Bemerkung 2.9

Da unter den Voraussetzungen des Maximumprinzips in Satz 2.8 auch $-u$ harmonisch ist, folgen dieselben Aussagen auch analog für das Minimum.

Eine direkte Folgerung aus dem Maximumprinzip und eine der wichtigsten Anwendungsformen dessen ist die Eindeutigkeit des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung auf einer beschränkten Menge.

Satz 2.10

Sei U beschränkt und seien $f \in C(U)$ und $g \in C(\partial U)$. Dann gibt es höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\bar{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } U, \\ u &= g && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann gilt wegen der Linearität, dass $u := u_1 - u_2$ eine harmonische Funktion mit $u \equiv 0$ auf ∂U ist. Also folgt aus dem Maximumprinzip

$$0 = \max_{x \in \bar{U}} u(x), \quad 0 = \min_{x \in \bar{U}} u(x),$$

d.h. $u \equiv 0$. □

Im eindimensionalen Fall sehen wir, dass eine harmonische Funktion auf U quadratisch und damit insbesondere analytisch sein muss. Im mehrdimensionalen Fall ist dies nicht ganz klar, da ja nur die *Summe* der zweiten Ableitungen verschwindet. Ausserdem könnte die Funktion am Rand der betrachteten Menge U zwar stetig, aber nicht differenzierbar sein, sodass man im Allgemeinen nicht einmal Differenzierbarkeit von u auf \bar{U} erwarten kann. Im *Inneren* des Gebiets erhält man aber eine starke Regularität, wie das folgende Resultat zeigt:

Satz 2.11: Innere Regularität

Sei u harmonisch in U . Dann gilt $u \in C^\infty(U)$.

Für den Beweis von Satz 2.11 greifen wir etwas in die Trickkiste und führen die sogenannten *Mollifier* (*Weichmacher*), bzw. einen speziellen solchen, ein.

Definition 2.12: Mollifier

Wir nennen die folgende Funktion $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\eta(x) := \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.22)$$

einen/den (standard) *Mollifier*, auch: (*Friedrich'scher*) *Glättungskern*. Hier wird die Konstante C so gewählt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ gilt. Ebenfalls als Mollifier (Familie) werden

reskalierte Versionen η_ε von η bezeichnet, die wir für $\varepsilon > 0$ durch

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

definieren.

Mollifier sind ein fundamentales Werkzeug in der Analysis von partiellen Differentialgleichungen und haben viele nützliche und wichtige Eigenschaften. Wir nennen zunächst nur die für den Beweis von Satz 2.11 relevanten.

Lemma 2.13

Die standard Mollifier Familie $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$ wie definiert in (2.22) ist glatt, also $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Weiterhin gilt $\eta_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Der Beweis folgt durch induktives Nachrechnen, dass alle Ableitungen von η in $x = \pm 1$ verschwinden, und der Beobachtung, dass $\partial_{x_i}(\eta_\varepsilon * f) = (\partial_{x_i}\eta_\varepsilon) * f$. (Für letzteres, siehe auch den Beweis von Satz 2.3.)

Bemerkung 2.14: Approximation des Einselements

Tatsächlich lässt sich auch zeigen, dass die Familie (η_ε) für $\varepsilon \searrow 0$ das Einselement der Faltung realisiert, d.h. es gilt (in einem zu präzisierenden Sinn) $\eta_\varepsilon * f \rightarrow f$ wenn $\varepsilon \searrow 0$. Wir kommen darauf später wieder zurück. Wegen dieser Eigenschaft werden Mollifier Familien bzw. der Prozess der Faltung mit Mollifiern auch *Approximation des Einselements* (**approximation of identity**) genannt. (Beachte, dass es *keine* Funktion ι auf \mathbb{R}^n gibt, so dass $\iota * f = f$ für alle f aus einer hinreichend großen Funktionenklasse gilt!)

Beweis von Satz 2.11. Wir konstruieren zunächst eine geglättete Version von u mit Hilfe des Mollifiers. Man sieht leicht, dass der Träger von η_ε die Kugel $B_\varepsilon(0)$ ist. Weiterhin ist η klarerweise radialsymmetrisch und wir setzen $\eta_{\text{rad}}(|x|) = \eta(x)$. Sei nun

$$x \in U_\varepsilon := \left\{ y \in U : d(y, \partial U) > \varepsilon \right\}.$$

Dann definieren wir die geglättete Version u^ε von u als die Faltung des Mollifiers mit u und integrieren scheibenweise (Zwiebelprinzip):

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= (\eta_\varepsilon * u)(x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta_{\text{rad}}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, d\sigma(y) \, dr. \end{aligned}$$

Mit der Mittelwerteigenschaft von u und Transformation erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta_{\text{rad}}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{\partial B_r(x)} 1 \, d\sigma(y) \, dr \\ &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \, dy \\ &= u(x) \int_{B_1(0)} \eta(z) \, dz = u(x). \end{aligned}$$

Also folgt $u \equiv u^\varepsilon$ in U_ε und wegen $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ auch $u = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(U_\varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, können wir den Grenzwert gegen Null betrachten und erhalten daraus $u \in C^\infty(U)$. \square

Einige weitere interessante Eigenschaften harmonischer Funktionen, die wir hier nicht beweisen, sind wie folgt. (Siehe Evans (1998) und die Übungen für die Details und mehr.)

- **Schranken an Ableitungen:** Sei u harmonisch in U und $B_r(x) \subset U$. Dann gilt für $|\alpha| = k$ und einer Konstanten C_k :

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k}{r^k} \int_{B_r(x)} |u(y)| \, dy.$$

- **Satz von Liouville:** Sei u harmonisch und beschränkt auf \mathbb{R}^n . Dann ist u konstant.
- **Harnack Ungleichung:** Sei U offen und einfach zusammenhängend und sei $V \subseteq U$ ebenfalls offen und so, dass $\bar{V} \subset U$ kompakt ist⁵. Dann existiert eine Konstante $C_V > 0$, sodass

$$\sup_{x \in V} u(x) \leq C_V \inf_{x \in V} u(x)$$

für jede harmonische Funktion in V gilt.

Für die Lösung der Poisson-Gleichung (2.13) ist zu beachten, dass u immer in die Summe einer Faltung mit der Grundlösung (die man explizit analysieren kann) und einer harmonischen Funktion zerlegt werden kann—siehe (2.19)—, sodass die obigen Eigenschaften auch teilweise auf Lösungen der Poisson-Gleichung erweitert werden können. Wir verweisen z.B. auf das Buch Gilbarg & Trudinger (2001).

2.2.3 Energiemethoden

Zum Abschluss wollen wir noch einen kurzen Ausblick auf sogenannte Energiemethoden für elliptische partielle Differentialgleichungen geben. Dazu betrachten wir das *Energiefunktional*

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_U |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_U v(x) f(x) \, dx.$$

Hier nehmen wir an, dass U beschränkt ist, und wir den Satz von Gauß für U benutzen dürfen.

Wir werden sehen, dass eine Lösung der Poisson-Gleichung ein Minimum des Energiefunktionals ist. Dies entspricht auch der typischen physikalischen Motivation, die Lösungen elliptischer Gleichungen oft als Gleichgewichtszustände, sprich Energieminima, herleiten, und ist auch als *Dirichlet-Prinzip* bekannt.

⁵Wir schreiben auch $V \Subset U$.

Satz 2.15: Energieminimierung

Die Funktion $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ ist *genau dann* eine Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } U \\ u &= g && \text{auf } \partial U, \end{aligned}$$

wenn u die Randbedingung erfüllt und

$$E(u) \leq E(v)$$

für alle $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $v = g$ auf ∂U gilt.

Beweis. Sei u eine Lösung des Dirichlet-Problems und $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $v = g$ auf ∂U . Dann gilt mit dem Gauß'schen Integralsatz, wobei wir die "(x)" Argumente weglassen:

$$\begin{aligned} E(u) - E(v) &= \frac{1}{2} \int_U (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) \, dx - \int_U f(u - v) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_U (-|\nabla(u - v)|^2 + 2\nabla(u - v) \cdot \nabla u) \, dx - \int_U f(u - v) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_U |\nabla(u - v)|^2 \, dx - \int_U (\Delta u + f)(u - v) \, dx + \int_{\partial U} (\partial_\nu u)(u - v) \, d\sigma(x) \end{aligned}$$

Da nach Annahme $\Delta u + f = 0$ in U und $u - v = 0$ auf ∂U gilt, verschwinden die letzten beiden Integrale. Also folgt

$$E(u) - E(v) = -\frac{1}{2} \int_U |\nabla(u - v)|^2 \, dx \leq 0.$$

Gelte umgekehrt $E(u) \leq E(v)$ für alle $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $v = g$ auf ∂U . Dann können wir insbesondere für jedes $\varepsilon > 0$ auch $v = u \pm \varepsilon\varphi$ betrachten, wobei $\varphi \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $\varphi = 0$ auf ∂U . Also gilt mit einer analogen Rechnung wie zuvor:

$$\begin{aligned} 0 \leq E(u \pm \varepsilon\varphi) - E(u) &= \frac{1}{2} \int_U (|\nabla(u \pm \varepsilon\varphi)|^2 - |\nabla u|^2) \, dx - \int_U f\varphi \, dx \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_U |\nabla\varphi|^2 \, dx \pm \varepsilon \int_U (-\Delta u - f)\varphi \, dx \pm \varepsilon \int_{\partial U} (\partial_\nu u)\varphi \, d\sigma(x) \end{aligned}$$

Das letzte Integral verschwindet wieder, da $\varphi = 0$ auf ∂U angenommen war, und nach Division durch ε erhalten wir

$$0 \leq -\frac{\varepsilon}{2} \int_U |\nabla\varphi|^2 \, dx \pm \int_U (-\Delta u - f)\varphi \, dx.$$

Wir können nun den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ betrachten, woraus sich

$$0 \leq \pm \int_U (-\Delta u - f)\varphi \, dx$$

ergibt. Das ist aber nur möglich, wenn das Integral verschwindet. Da dies nun für *jedes* $\varphi \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $\varphi = 0$ auf ∂U gilt, muss schon $-\Delta u = f$ in U sein. \square

Die Betrachtung des Grenzwerts von $(E(u + \varepsilon\varphi) - E(u))/\varepsilon$ im zweiten Teil des Beweises kann als Ableitung des Energiefunktionals interpretiert werden; entsprechend korrespondiert die Poisson-Gleichung zu einer Optimalitätsbedingung erster Ordnung für die Energieminimierung. (Da das Energiefunktional mit dem Norm-Quadrat strikt konvex ist, ist keine Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung nötig.)

Achtung: Wir werden später noch sehen, dass im Allgemeinen *kein Energieminimum* im obigen Sinne in $C^1(U)$ oder gar $C^2(U)$ existiert! Um Existenz eines Minimums sicherzustellen, werden wir auf passende grössere Funktionenräume ausweichen müssen. Dies entspricht einer Verallgemeinerung des Lösungsbegriffes der Poisson-Gleichung zu schwachen Lösungen.

2.3 Wärmeleitungsgleichung

Im Folgenden betrachten wir die *Wärmeleitungsgleichung* (**heat equation**) (auch: *Diffusionsgleichung*) auf einer offenen nichtleeren Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für $u: U \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } U \times \mathbb{R}_+, \quad (2.23)$$

bzw. die inhomogene Version mit $f: U \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\partial_t u = \Delta u + f \quad \text{in } U \times \mathbb{R}_+. \quad (2.24)$$

Gegebenenfalls kann auch ein endliches Zeitintervall $[0, T]$ statt \mathbb{R}_+ betrachtet werden. In jedem Fall geben wir für die Wärmeleitungsgleichung einen *Anfangswert* (**initial value**) vor:

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } U. \quad (2.25)$$

Im Fall einer beschränkten Menge U werden wir auch noch Randbedingungen auf $\partial U \times \mathbb{R}_+$ bzw. auf $\partial U \times [0, T]$ fordern.

Grundsätzlich werden wir im weiteren für Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung ($f = 0$) ganz ähnliche Resultate wie für harmonische Funktionen herleiten können, allerdings in etwas komplizierterer Ausführung.

Physikalische Motivation: Die Wärmeleitungsgleichung tritt neben der namengebenden Anwendungen generell nahezuüberall auf, wo Dichten physikalischer Größen (Wärme, Chemikalien, Bakterien, auch Populationen, ...) einer zeitlichen Veränderung unterliegen. Wenn u eine solche Dichte bezeichnet, ist die Änderung der Gesamtgröße in einer Menge $V \Subset U$ durch

$$\frac{d}{dt} \int_V u(x, t) \, dx = - \int_{\partial V} F(x, t) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x)$$

gegeben, wobei F die sogenannte *Flußdichte* ist. Mit einer Anwendung des Satzes von Gauß und Vertauschung von Integration und Differentiation folgt

$$\partial_t u(x, t) = -\nabla \cdot F(x, t) \quad (x \in U).$$

Wir erhalten die Identität auf U , da die vorige Überlegung für *jede* hinreichend glatte Teilmenge V von U funktioniert. Die Flußdichte zeigt in vielen Situationen in die Richtung des *negativen*

Gradienten, was zu einem Fluß von *hohen* Konzentrationen (Dichten) zu *niedrigen* korrespondiert, also “abwärts”. (Dieser Sachverhalt heißt in der Physik *Fick’s Gesetz*.) Also ist $F(x, t) \approx -a\nabla u(x, t)$ mit einer materialabhängigen Konstanten, oder sogar Matrix, a , und es folgt

$$\partial_t u(x, t) = \nabla \cdot a \nabla u(x, t) \quad (x \in U),$$

was für $a \equiv 1$ genau die Wärmeleitungsgleichung (2.23) ist.

2.3.1 Lösungsdarstellung

Wir beginnen wieder mit der Berechnung einer speziellen Lösung für $U = \mathbb{R}^n$, für die homogene Wärmeleitungsgleichung (2.23) mit der Anfangsbedingung (2.25). Für $U = \mathbb{R}^n$ nennt man diese Kombination auch *Cauchy-Problem*. Dazu machen wir zunächst eine Beobachtung zur Skalierung, die inhärent in der Gleichung vorgegeben ist. Eine solche Betrachtung ist grundsätzlich für nahezu jeden Differentialoperator mit gemischten Ordnungen in Zeit- und Orts-Ableitungen interessant.

Genauer sehen wir hier, dass, falls u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (2.23) ist, auch

$$v_\lambda(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad (x, t \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.23) ist. Bei dieser Skalierung $(x, t) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t)$ ist das Verhältnis $|x|/\sqrt{t}$ jedenfalls für $\lambda > 0$ invariant, und wir suchen deshalb eine spezielle Lösung mit dieser Variable, genauer setzen wir an:

$$u(x, t) := t^{-\alpha} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

für zu bestimmende $\alpha \in \mathbb{R}$ und $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.⁶ Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ berechnen wir leicht

$$\Delta u(x, t) = t^{-\alpha-1} \Delta U \frac{x}{\sqrt{t}}$$

und

$$\partial_t u(x, t) = -\alpha t^{-\alpha-1} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{t^{-\alpha-1} x}{2\sqrt{t}} \cdot \nabla U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Wenn wir diese Identitäten in die Wärmeleitungsgleichung (2.23) einsetzen, erhalten wir mit $y = x/\sqrt{t}$ und wegen $t > 0$:

$$\alpha U(y) - \frac{1}{2} y \cdot \nabla U(y) + \Delta U(y) = 0.$$

Analog zur Poisson-Gleichung machen wir nun einen radialsymmetrischen Ansatz—wir hatten gesehen, dass tatsächlich die *radiale* Größe $|y| = |x|/\sqrt{t}$ interessant ist—, $r = |y|$, mit

$$U(y) = w(|y|) = w(r)$$

für eine geeignete Funktion $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Damit erhalten wir, vgl. (2.14),

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0 \quad (r > 0).$$

⁶Man kommt auch mit der zunächst natürlicheren Wahl $\alpha = 1$ zum Ziel, die Rechnung ist aber auf katastrophale Weise viel komplizierter. Das kann man natürlich erst wissen, wenn man es schon einmal versucht hat ...

Mit der Wahl $\alpha = \frac{n}{2}$ und scharfem Hinsehen formulieren wir um:

$$(r^{n-1}w'(r))' + \frac{1}{2}(r^n w(r))' = 0 \quad (r > 0)$$

Entsprechend

$$r^{n-1}w'(r) + \frac{1}{2}r^n w(r) = c \quad (r > 0)$$

mit einer Konstante c . Wir suchen weiter eine Lösung w , deren Ableitungen für $r \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren; damit wählen wir $c = 0$. Es verbleibt die Differentialgleichung

$$w'(r) = -\frac{1}{2}rw(r) \quad (r > 0)$$

mit der Lösung

$$w(r) = \gamma e^{-\frac{r^2}{4}} \quad (r > 0)$$

mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$. Mit einer speziellen Wahl der Konstante γ und Rückeinsetzen $r = |x|/\sqrt{t}$ in u erhalten wir die Grundleistungsgleichung:

Definition 2.16: Grundleistung/Fundamentallösung

Die Funktion $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

heißt *Grundleistung* oder *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung (2.23).

Man beachte, dass die Skalierung in der Grundleistung so gewählt wurde, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1 \tag{2.26}$$

für alle $t > 0$ gilt. Für $t \searrow 0$ konvergiert Φ punktweise in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegen Null, im Punkt $x = 0$ jedoch gegen unendlich. Eine ähnliche Situation lag auch schon bei der der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung (2.15) vor und suggeriert, dass der richtige Grenzwert $\Phi(\cdot, 0)$ tatsächlich die Dirac- δ Distribution sein könnte. Entsprechend würden wir die Lösung des Anfangswertproblems für die Wärmeleitungsgleichung durch eine Faltung des Anfangswerts mit der Grundleistung erhalten,

$$u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy, \tag{2.27}$$

was das nächste Resultat auch bestätigt:

Satz 2.17

Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ und $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch (2.27). Dann löst u das Anfangswertproblem (2.23)/(2.25) und ist glatt, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Beweis. Da für $t > 0$ die Grundlösung Φ glatt, sprich, unendlich oft differenzierbar ist, sowie alle partiellen Ableitungen von Φ absolut integrierbar sind, können wir bei der Betrachtung partieller Ableitungen Differentiation und Integration in (2.27) vertauschen. Es folgt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [\varepsilon, \infty))$, sowie

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\partial_t \Phi(x - y, t) - \Delta \Phi(x - y, t) \right] u_0(y) dy = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Also ist u glatt und erfüllt (2.23) auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Um Stetigkeit auch in $t = 0$ und die Erfüllung des Anfangswerts (2.25) zu erhalten, betrachten wir den Grenzwert $t \searrow 0$. Wir zeigen, dass für jedes $z \in \mathbb{R}^n$ und jede Folge $(x, t) \rightarrow (z, 0)$ in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ auch $u(x, t) \rightarrow u_0(z)$ gilt. Sei dazu $z \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$|u_0(x) - u_0(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(z)$$

gilt. Sei nun $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z)$. Dann folgt mit (2.26) für $t > 0$:

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_0(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) (u_0(y) - u_0(z)) dy \right| \\ &\leq \underbrace{\int_{B_\delta(z)} \Phi(x - y, t) |u_0(y) - u_0(z)| dy}_{:=I(x, t)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} \Phi(x - y, t) |u_0(y) - u_0(z)| dy}_{:=J(x, t)}. \end{aligned}$$

Da $|u_0(y) - u_0(z)| < \varepsilon$ auf $B_\delta(z)$ gilt, folgt, nochmals mit (2.26),

$$I(x, t) < \varepsilon \int_{B_\delta(z)} \Phi(x - y, t) dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = \varepsilon \quad (x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z), t > 0).$$

Wir schätzen $J(x, t)$ ab:

$$J(x, t) \leq 2 \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} \Phi(x - y, t) dy = \frac{2 \|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)$ folgt aus der Dreiecksungleichung und $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z)$:

$$|y - z| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - z|,$$

also $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - z|$. (Skizze!) Also können wir die x -Abhängigkeit in der letzten Abschätzung loswerden:

$$J(x, t) \leq \frac{2 \|u_0\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(z)} e^{-\frac{|z-y|^2}{16t}} dy = \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr$$

mit einer geeigneten Konstante $C = C(\|u_0\|_\infty, n)$. Man sieht leicht (z.B. mit dominierter Konvergenz), dass der letzte Ausdruck (unabhängig von z) für $t \searrow$ gegen Null geht. Für hinreichend kleines $\tau > 0$ gilt also $J(x, t) < \varepsilon$ für $0 < t < \tau$ und damit

$$|u(x, t) - u_0(z)| < 2\varepsilon \quad (x \in B_{\frac{\delta}{2}}(z), 0 < t < \tau).$$

Es folgt $u(x, t) \rightarrow u_0(z)$ wenn $(x, t) \rightarrow (z, 0)$ in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Damit ist u stetig in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ mit $u(\cdot, 0) = u_0$. \square

Bemerkung 2.18: Stochastische Interpretation

Da die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung für jedes $t > 0$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, kann man sie auch als Übergangswahrscheinlichkeit eines Markov-Prozesses interpretieren. Da $\Phi(x - y, 0)$ die bei y zentrierte Dirac- δ Distribution ist, startet der Prozess deterministisch mit einem Teilchen im Punkt y , und $\Phi(x - y, t)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im Zeitintervall $(0, t)$ von y nach x springt. Analog kann man die Faltung (2.27) interpretieren, wenn man u_0 normiert: dabei ist $u_0(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Position eines Teilchens zur Zeit $t = 0$ und $u(\cdot, t)$ die Dichte für die Position zur Zeit t .

Bemerkung 2.19: Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

Aus der Lösungsdarstellung (2.27) sieht man weiter, dass die Wärmeleitungsgleichung *unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* (speed of propagation) hat. Dies bedeutet, dass lokale Änderungen in u_0 in beliebig kurzer Zeit globale Auswirkungen haben, bzw. in der obigen stochastischen Interpretation, dass beliebig große Sprünge auch in beliebig kleinen Zeitintervallen noch positive Wahrscheinlichkeit haben. Mathematisch sieht man dies für einen nichtnegativen Anfangswert $u_0 \neq 0$ mit kompaktem Träger. Dann gilt nämlich für *jede* Zeit $t > 0$, dass $u(x, t) > 0$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^n$ ist! Die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ist ein deutlicher Unterschied zur Transportgleichung, in der die zeitliche Änderung des Trägers durch das Geschwindigkeitsfeld b beschränkt war.

Wir bemerken an dieser Stelle kurz weiter, dass eine ähnliche Lösungsdarstellung auch für das inhomogene Problem (2.24) mit Anfangswert $u_0 = 0$ gilt: Für $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\cdot, t)$ stetig und beschränkt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$, löst nach Satz 2.17 die Funktion

$$v(x, t; s) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) \, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > s)$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung (2.23) auf $\mathbb{R}^n \times (s, \infty)$ mit Anfangsbedingung $v(\cdot, s; s) = f(\cdot, s)$, und das für jedes $s \geq 0$. Das *Duhamel Prinzip* besagt nun, dass

$$u(x, t) := \int_0^t v(x, t; s) \, ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) \, dy \, ds \quad (2.28)$$

eine Lösung für die *inhomogene* Wärmeleitungsgleichung (2.24) mit Anfangswert 0 definiert. (Hier muss man noch weitere Annahmen an f stellen, die wir an dieser Stelle nicht präzisieren.) Man nennt diese Formel auch die *Variation der Konstanten* oder *Duhamel Formel*; sie, bzw. das zugrundeliegende Duhamel Prinzip, findet auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und generell auch bei anderen partiellen Differentialgleichungen weitverbreitete Anwendung. (Wir werden bei der Wellengleichung wieder damit zu tun haben.)

Wegen der Linearität der Wärmeleitungsgleichung erhält man Lösungen der inhomogenen Gleichung (2.24) mit Anfangswert u_0 wie in (2.25) dann durch Superposition (Addition) von (2.27) und (2.28).

2.3.2 Eigenschaften der Lösung

Im folgenden diskutieren wir einige lokale und globale Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung. Dazu nehmen wir grundsätzlich an, dass die offene, nichtleere Menge U beschränkt ist.

Zur funktionalanalytischen Behandlung benötigen wir noch passende Funktionenräume, wegen der unterschiedlichen Regularität in Ort und Zeit. Dazu benutzen wir hier und im folgenden die Notation

$$U_T := U \times (0, T], \quad \partial U_T := \overline{U_T} \setminus U_T,$$

wobei wir U_T den *parabolischen Zylinder* und ∂U_T den *parabolischen Rand* nennen. (Skizze!) Achtung: Der "Deckel" $U \times \{T\}$ gehört *nicht* zum parabolischen Rand! Wir definieren weiter den Raum

$$C^{2,1}(U_T) := C((0, T]; C^2(U)) \cap C^1((0, T]; C(U)), \quad (2.29)$$

in dem sowohl die erste Zeitableitung als auch die zweiten Ortsableitungen sinnvoll definiert und stetig sind, und jeweils noch stetige Funktionen in der anderen Variablen sind. Die Identifikation zwischen einer Funktion u auf $U \times [0, T]$ und einer \mathbf{u} im Raum auf der rechten Seite in (2.29) funktioniert über $u(x, t) := [\mathbf{u}(t)](x)$.

Wie bei der Laplace-Gleichung erhält man auch bei der Wärmeleitungsgleichung ein Maximumprinzip, allerdings nur mit einem angepassten Gebiet und auch einer Gewichtung im Integral. (Für den Beweis, siehe Evans (1998).)

Satz 2.20: Mittelwerteigenschaft

Sei $u \in C^{2,1}(U \times [0, T])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2.23) auf U_T , und seien $(x, t) \in U \times (0, T)$ und $r > 0$ so, dass

$$E(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t] : \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\} \subset U \times (0, T)$$

gilt. Dann gilt die Mittelwerteigenschaft

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{|t - s|^2} dy ds.$$

Ein Maximumprinzip kann man ebenfalls wieder über die Mittelwerteigenschaft beweisen, in diesem Fall wegen der Gewichtung im Integral allerdings mit mehr Aufwand als im Fall harmonischer Funktionen. Wir führen hier einen alternativen Beweis, basierend auf Approximation und Widerspruch, wenigstens für das Maximumprinzip.

Satz 2.21: Starkes Maximumprinzip

Sei $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2.23) auf U_T .

(i) Dann gilt

$$\max_{(x, t) \in \overline{U_T}} u(x, t) = \max_{(x, t) \in \partial U_T} u(x, t). \quad (2.30)$$

(ii) Ist U zusammenhängend, und existiert ein Punkt $(x_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(x_0, t_0) = \max_{(x,t) \in \overline{U_T}} u(x, t),$$

dann ist u konstant in $\overline{U_{t_0}}$.

Die analogen Aussagen gelten für das Minimum.

Beweis. Wir beweisen nur (2.30). Betrachte die Approximation $u^\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$ mit $\varepsilon > 0$. Offenbar gilt

$$\partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = -\varepsilon \quad \text{auf } U_T.$$

Sei (x_0, t_0) ein Maximum von u^ε in U_T . Dann gilt

$$\partial_t u^\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0 \quad \text{und} \quad \Delta u^\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0,$$

und damit folgt der Widerspruch $0 \leq -\varepsilon < 0$. Also hat u^ε kein Maximum in U_T . Da u^ε für $\varepsilon \searrow 0$ gleichmässig gegen u konvergiert, wird auch das Maximum von u auf ∂U_T angenommen. \square

Aus dem Maximumprinzip folgt wieder, komplett analog zu Satz 2.10 die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems (2.23)/(2.25) mit der Randbedingung

$$u(x, t) = g(x, t) \quad (x \in \partial U \times (0, T)). \quad (2.31)$$

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man zudem analog zur Laplace-Gleichung wieder innere Regularität für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (2.23) zeigen und detaillierte Abschätzungen für deren Ableitungen herleiten. Wir stellen ersteres noch fest und verweisen sonst auf Evans (1998).

Satz 2.22: Innere Regularität

Sei $u \in C^{2,1}(U_T)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2.23) in U_T . Dann ist $u \in C^\infty(U_T)$.

2.3.3 Energiemethoden

Wir untersuchen im Folgenden Energiemethoden für die Wärmeleitungsgleichung und vor allem deren Implikationen bezüglich des Langzeitverhaltens der Lösungen. Dazu werden wir oft die Notation $u(t)$ für Funktionen u auf $U \times \mathbb{R}_+$ benutzen, und damit meinen wir $u(\cdot, t)$, also die Funktion u zur Zeit t als Funktion des Ortes. Hier soll weiterhin U beschränkt sein, und so, dass wir den Satz von Gauß benutzen dürfen.

Dirichlet-Problem: Wir betrachten zunächst das Dirichletproblem, gegeben durch die (inhomogene) Wärmeleitungsgleichung (2.24), den Anfangswert (2.25) und die Randbedingung (2.31), und nehmen an, dass u eine Lösung dieses Problems ist. Ganz in Analogie zur Poisson-Gleichung definieren wir das Energiefunktional

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_U |\nabla u(x, t)|^2 dx - \int_U f(x) u(x, t) dx \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sowohl f als auch g unabhängig von t sind. Damit folgt für die Zeitableitung des Energiefunktional

$$\frac{d}{dt} [E(u(t))] = \int_U \nabla u(x, t) \cdot (\nabla \partial_t u)(x, t) dx - \int_U f(x) \partial_t u(x, t) dx.$$

Mit dem Satz von Gauß ergibt sich weiter

$$\frac{d}{dt} [E(u(t))] = \int_{\partial U} \partial_\nu u(x, t) \partial_t u(x, t) d\sigma(x) - \int_U \Delta u(x, t) \partial_t u(x, t) dx - \int_U f(x) \partial_t u(x, t) dx.$$

Da g als unabhängig von t angenommen wurde, folgt $\partial_t u(x, t) = 0$ auf $\partial U \times (0, T)$ und damit verschwindet der erste Term. Wir nutzen, dass u Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2.24) ist, und erhalten schließlich

$$\frac{d}{dt} [E(u(t))] = - \int_U |\partial_t u(x, t)|^2 dx < 0.$$

Das Energiefunktional $t \mapsto E(u(t))$ ist also monoton fallend. Insbesondere gilt $E(u(t)) \leq E(u_0)$, und $t \mapsto E(u(t))$ kann nur stationär werden, wenn $\partial_t u(t) = 0$ auf U ist. Dies legt nahe, dass $u(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Lösung der Poisson-Gleichung konvergiert. Wir zeigen, dass dem wirklich so ist.

Erfülle u_∞ also die Poisson-Gleichung $-\Delta u_\infty = f$ auf U mit Randwert $u_\infty = g$ auf ∂U . Dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_U (u(x, t) - u_\infty(x))^2 dx &= 2 \int_U \partial_t u(x, t) [u(x, t) - u_\infty(x)] dx \\ &= 2 \int_U [\Delta u(x, t) + f(x)] (u(x, t) - u_\infty(x)) dx \\ &= 2 \int_U [\Delta u(x, t) - \Delta u_\infty(x)] (u(x, t) - u_\infty(x)) dx \\ &= 2 \int_{\partial U} [\partial_\nu (u(x, t) - u_\infty(x))] (u(x, t) - u_\infty(x)) dx \\ &\quad - 2 \int_U |\nabla (u(x, t) - u_\infty(x))|^2 dx. \end{aligned}$$

Wegen $u(x, t) = u_\infty(x) = g(x)$ auf ∂U verschwindet der erste Term:

$$\frac{d}{dt} \int_U (u(x, t) - u_\infty(x))^2 dx \leq -2 \int_U |\nabla (u(x, t) - u_\infty(x))|^2 dx.$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, verwenden wir die Friedrichs-Ungleichung (ohne Beweis):

Satz 2.23: Friedrichs-Ungleichung

Sei $v \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$ mit $v = 0$ auf ∂U . Dann gilt

$$\int_U |v(x)|^2 dx \leq C_F \int_U |\nabla v(x)|^2 dx$$

mit einer Konstanten $C_F > 0$, die nicht von v abhängt.

Es gilt also mit $\lambda := 1/C_F$:

$$\frac{d}{dt} \int_U (u(x, t) - u_\infty(x))^2 dx \leq -2\lambda \int_U (u(x, t) - u_\infty(x))^2 dx,$$

und mit der Gronwall-Ungleichung erhalten wir daraus

$$\int_U (u(x, t) - u_\infty(x))^2 dx \leq e^{-2\lambda t} \int_U (u_0(x) - u_\infty(x))^2 dx.$$

Damit konvergiert $u(t)$ also, sogar exponentiell schnell, gegen die Lösung der Poisson-Gleichung im $L^2(U)$ Sinne:

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^2(U)} \leq e^{-\lambda t} \|u_0 - u_\infty\|_{L^2(U)} \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Auch die Eindeutigkeit der Lösung kann man analog beweisen. Sei u die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2.23) mit Randwert $u = 0$ auf $\partial U \times (0, T)$ und Anfangswert $u_0 = 0$. Dann gilt mit der selben Rechnung wie oben

$$\frac{d}{dt} \int_U |u(x, t)|^2 dx = 2 \int_U u(x, t) \partial_t u(x, t) dx = 2 \int_U u(x, t) \Delta u(x, t) dx = -2 \int_U |\nabla u(x, t)|^2 dx.$$

Aus der Friedrichs-Ungleichung folgt wegen $u_0 \equiv 0$ auch

$$\int_U |u(x, t)|^2 dx \leq e^{-\lambda t} \int_U |u_0(x)|^2 dx = 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Also ist $u \equiv 0$.

Neumann-Problem: Einige weitere Eigenschaften erhalten wir nur für das *Neumann-Problem* (analog auch für das Problem im ganzen Raum) der *homogenen* Wärmeleitungsgleichung (2.23) mit dem Anfangswert (2.25) und der Randbedingung

$$\partial_\nu u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \partial U \times (0, T)).$$

In diesem Fall wird der Mittelwert erhalten:

$$\int_U u(x, t) dx = \int_U u_0(x) dx \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Dies sieht man sofort mit dem Gaußschen Satz und Einsetzen der Randbedingung, da

$$\frac{d}{dt} \int_U u(x, t) dx = \int_U \partial_t u(x, t) dx = \int_U \Delta u(x, t) dx = \int_{\partial U} \partial_\nu u(x, t) d\sigma(x) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Man rechnet auch wieder nach, dass für die obige Energie E die *Dissipations*-Eigenschaft gilt, also

$$\frac{d}{dt} [E(u(t))] = - \int_U |\Delta u(x, t)|^2 dx.$$

In diesem Fall erhalten wir auch Dissipationseigenschaften für sogenannte *Entropien*

$$\Psi(u(t)) := \int_U \psi(u(x, t)) dx$$

wobei ψ eine konvexe und zweimal differenzierbare reelle Funktion ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_U \psi(u(x, t)) dx &= \int_U \partial_t u(x, t) \psi'(u(x, t)) dx = \int_U \Delta u(x, t) \psi'(u(x, t)) dx \\ &= \int_U \underbrace{\partial_\nu u(x, t)}_{=0} \psi'(u(x, t)) d\sigma - \int_U \nabla u(x, t) \cdot \nabla [\psi'(u(x, t))] dx \\ &= - \int_U |\nabla u(x, t)|^2 \psi''(u(x, t)) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Ist ψ stark konvex, d.h. $\psi'' \geq C > 0$ sogar gleichmässig von Null weg beschränkt, dann erhält man eine Dissipations-Eigenschaft der Form

$$\frac{d}{dt} \int_U \psi(u(x, t)) dx \leq -C \int_U |\nabla u(x, t)|^2 dx \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Einsicht in das Langzeitverhalten des Neumann-Problems kann man unter anderem mit der Wahl

$$\psi(s) := (s - \bar{u}_0)^2 \quad \text{mit} \quad \bar{u}_0 := \int_U u_0(x) dx \in \mathbb{R}$$

gewinnen. Da $\psi''(s) = 2s$, folgt aus der obigen Rechnung

$$\frac{d}{dt} \int_U (u(x, t) - \bar{u}_0)^2 dx = -2 \int_U |\nabla u(x, t)|^2 dx = -2 \int_U |\nabla(u(x, t) - u_0)|^2 dx.$$

Um nun genauere Aussagen zu erhalten, wollen wir auf der rechten Seite das Integral des Gradienten noch durch die ursprüngliche Entropie abschätzen. Dies liefert die sogenannte Poincaré-Ungleichung (die wir aber erst später beweisen werden):

Satz 2.24: Poincaré-Ungleichung

Sei $v \in C^1(U)$ mit $\int_U v(x) dx = 0$. Dann gilt

$$\int_U |v(x)|^2 dx \leq C_P \int_U |\nabla v(x)|^2 dx$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten $C_P > 0$.

Es gilt also mit $\lambda := 1/C_P$:

$$\frac{d}{dt} \int_U (u(x, t) - \bar{u}_0)^2 dx \leq -2\lambda \int_U (u(x, t) - \bar{u}_0)^2 dx,$$

und mit der Gronwall-Ungleichung erhalten wir daraus

$$\int_U (u(x, t) - \bar{u}_0)^2 dx \leq e^{-2\lambda t} \int_U (u_0(x) - \bar{u}_0)^2 dx.$$

Damit konvergiert u exponentiell im $L^2(U)$ -Sinne gegen den Mittelwert von u_0 :

$$\|u(t) - \bar{u}_0\|_{L^2(U)} \leq e^{-\lambda t} \|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(U)} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

2.4 Wellengleichung

Wir betrachten im Folgenden die *Wellengleichung* für eine Funktion $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\partial_{tt}^2 u = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (2.32)$$

nun mit *zwei* Anfangswerten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (2.33)$$

Die Ausbreitung von Wellen unterscheidet sich in verschiedenen Raumdimensionen, weshalb auch die mathematische Analyse dimensionsabhängig ist und in den folgenden Abschnitten untersucht werden soll. Da überlicher Wellen vom Rand eines Objektes reflektiert werden, ist die Behandlung einer beschränkten zugrundeliegenden Menge ungleich komplizierter. Wir konzentrieren uns daher für die Wellengleichung nur auf den Ganzraum \mathbb{R}^n .

2.4.1 Die Eindimensionale Wellengleichung

In einer Raumdimension gibt es nur zwei mögliche Ausbreitungsrichtungen für eine Welle—nach links oder rechts—, und die Wellengleichung kann deshalb auf zwei Transportgleichungen zurückgeführt werden. Wir setzen daher für eine geeignet glatte Lösung $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ der Wellengleichung (2.32):

$$v := \partial_t u - \partial_x u \quad \text{und} \quad w := \partial_t u + \partial_x u.$$

Dann gilt

$$\partial_t v = \partial_{tt}^2 u - \partial_{tx}^2 u = \partial_{xx}^2 u - \partial_{xt}^2 u = -\partial_x v$$

und

$$\partial_t w = \partial_{tt}^2 u + \partial_{tx}^2 u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{xt}^2 u = \partial_x w.$$

Die beiden Hilfsfunktionen v und w lösen also homogene Transportgleichungen und wir können sie mit der Charakteristiken-Methode berechnen. Es gilt

$$v(x, t) = v(x - t, 0) \quad \text{und} \quad w(x, t) = w(x + t, 0) \quad ((x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+).$$

Nun müssen wir noch die passenden Anfangswerte für v und w einsetzen. Mit (2.33) folgt

$$v(x, t) = v_0(x - t) - u'_0(x - t), \quad w(x, t) = v_0(x + t) + u'_0(x + t).$$

Aus der ursprünglichen Definition von v und w folgern wir

$$\partial_t u(x, t) = \frac{1}{2} [v(x, t) + w(x, t)] = \frac{1}{2} [v_0(x - t) + v_0(x + t) + u'_0(x + t) - u'_0(x - t)].$$

Dies integrieren wir noch bezüglich der Zeit:

$$u(x, t) = c(x) + \frac{1}{2} [u_0(x + t) + u_0(x - t)] + \frac{1}{2} \int_0^t (v_0(x - s) + v_0(x + s)) ds,$$

und die—noch von x abhängige—Korrektur c können wir aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ zu 0 bestimmen. Daraus ergibt sich die *d'Alembert Formel*:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + t) + u_0(x - t)] + \frac{1}{2} \int_0^t [(v_0(x - s) + v_0(x + s))] ds. \quad (2.34)$$

Aus der genaueren Inspektion der Regularitätsvoraussetzungen für die obige Herleitung folgt:

Satz 2.25: Lösung Wellengleichung in 1D

Sei $n = 1$ und seien $u_0, v_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ der Wellengleichung (2.32) mit Anfangswerten (2.33), gegeben durch die Formel (2.34).

Wir sehen, dass sich die Lösung $u(x, t)$ für $v_0 \equiv 0$ aus dem sphärischen Mittelwert von u_0 über einer wachsenden eindimensionalen Sphäre von Radius t zentriert in x ergibt. Das zeigt, dass der Abhängigkeitsbereich des Punktes (x, t) der sogenannte **Licht-Kegel (light cone)**

$$C(x, t) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R} \times [0, t] : |y - x| \leq t - s \right\} \quad (2.35)$$

ist, durch dessen Funktionswerte $u(x, t)$ bestimmt ist. (Skizze!) Insbesondere sieht man hier, dass Lösungen der Wellengleichung nur *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (finite speed of propagation)* haben! Sphärische Mittelwerte spielen auch in höheren Dimensionen eine wichtige Rolle bei der Lösung der Wellengleichung, wie wir gleich sehen.

Bemerkung: Alternativer Ansatz: Binomische Formel

Man kann die obige Lösungsformel (2.34) auch über einen Ansatzes mittels binomischer Formel

$$\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$$

herleiten. Hier löst man allgemein die Transportgleichungen

$$\partial_t v + \partial_x v = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u + \partial_x u = v$$

und setzt dann die Anfangswerte ein.

2.4.2 Sphärische Mittelwerte in höheren Dimensionen

Sei zunächst $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig und fix. Wir definieren wir den *sphärischen Mittelwert*

$$U(r, t; x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) \, d\sigma(y), \quad (2.36)$$

und analog für die Anfangsdaten

$$U_0(r; x) = \int_{\partial B_r(x)} u_0(y) \, d\sigma(y), \quad V_0(r; x) = \int_{\partial B_r(x)} v_0(y) \, d\sigma(y).$$

Die sphärischen Mittelwerte als Funktion von r und t erfüllen eine eindimensionale Wellengleichung in radialen Koordinaten:

Lemma 2.26: Euler-Poisson-Darboux Gleichung

Sei $n \geq 2$ und sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ eine Lösung der Wellengleichung (2.32) mit Anfangswerten (2.33). Dann erfüllen die sphärischen Mittelwerte $U \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$, definiert in (2.36), für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{tt}^2 U = \partial_{rr}^2 U + \frac{n-1}{r} \partial_r U = \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r [r^{n-1} \partial_r U] \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (2.37)$$

sowie

$$U(r, 0; x) = U_0(r; x), \quad \text{und} \quad (\partial_t U)(r, 0; x) = V_0(x; r).$$

Beweis. Analog zum Beweis der Mittelwerteigenschaft für die Poisson-Gleichung zeigen wir

$$(\partial_r U)(r, t; x) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y, t) \, dy.$$

Durch erneutes Differenzieren und nochmals analoge Rechnung erhält man

$$\partial_{rr}^2 U(r, t; x) = \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y, t) \, d\sigma(y) - \frac{n-1}{n} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y, t) \, dy,$$

also

$$\begin{aligned} \partial_{rr}^2 U(r, t; x) + \frac{n-1}{r} \partial_r U(r, t; x) &= \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y, t) \, dy \\ &= \int_{\partial B_r(x)} \partial_{tt}^2 u(y, t) \, dy = \partial_{tt}^2 U(r, t; x). \quad \square \end{aligned}$$

Die Euler-Poisson-Darboux Gleichung ist die Grundlage für die Herleitung von Lösungsdarstellungen der mehrdimensionalen Wellengleichung: Im Fall $n = 3$ kann man mit dem Ansatz $\tilde{U}(r, t; x) := rU(r, t; x)$, und analog für die Anfangsdaten, die Gleichung für den sphärischen Mittelwert (2.37) auf die eindimensionale Wellengleichung zurückführen, denn nach (2.37) für $n = 3$ gilt:

$$\partial_{tt}^2 \tilde{U} = r \partial_{rr}^2 U + 2 \partial_r U = \partial_r [r \partial_r U + U] = \partial_{rr}^2 \tilde{U}.$$

Mit der d'Alembert-Formel (2.34) aus dem vorigen Abschnitt erhält man die *Kirchhoff'sche Formel* als Lösungsformel für die Wellengleichung in 3D:

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} [tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y - x)] d\sigma(y) \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+).$$

Ein analoger Trick funktioniert für $n = 2$ leider nicht. Durch Dimensionsreduktion kann man aber die Kirchhoff'sche Formel ausnutzen und erhält die *Poisson-Formel* als Lösungsformel für die Wellengleichung in 2D:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{t^2 v_0(y) + tu_0(y) + t \nabla u_0(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} d\sigma(y), \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+).$$

Man erkennt einen wesentlichen Unterschied zwischen den ungeraden Dimensionen $n = 1$ und $n = 3$, sowie der geraden Dimension $n = 2$. Dieser besteht auch für allgemeine Dimensionen n ; wir verweisen auf Evans (1998). In ungeraden Dimensionen hängt der Wert der Lösung wirklich nur von Mittelwerten der Anfangswerte über *Sphären* mit Radius t ab, während in geraden Dimensionen Mittelwerte über ganze *Kugeln* berechnet werden muss. Der Einflussbereich einzelner Punkte auf die Wellenfortpflanzung ist also völlig unterschiedlich.

2.4.3 Eigenschaften der Lösung

Im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung erfüllt die Wellengleichung kein Maximumprinzip. Das ist nicht verwunderlich, denn in der Natur einer Welle liegt klarerweise auch das Auftreten von Maxima und Minima im Inneren. Ausserdem erhält man keine innere Regularität, wie schon aus der d'Alembert-Formel (2.34) in 1D direkt sichtbar wird. Die Lösung für Zeit $t > 0$ ist also genauso oft (im Ort) differenzierbar wie der Anfangswert u_0 .

Interessant sind für (2.32) weiterhin sogenannte *zeitharmonische* Lösungen der Form

$$u(x, t) = e^{i\omega t} U(x),$$

mit der *Kreisfrequenz* $\omega \in \mathbb{R}$ und der (ortsabhängigen) Amplitude $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist zunächst eine komplexe Fundamentaldarstellung, und nach der Euler-Formel erhält man durch Real- und Imaginärteil genau die Grundschwingungen Sinus und Cosinus. Durch Einsetzen in die Wellengleichung erhält man, dass die Amplitude U die *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta U + \omega^2 U = 0$$

erfüllen soll. Die Helmholtz-Gleichung hat zwar eine ähnliche Gestalt wie die Poisson-Gleichung, der Term $\omega^2 U$ ändert aber die Eigenschaften grundlegend. Unter anderem werden das Maximumprinzip und möglicherweise auch die Eindeutigkeit der Lösung zerstört. Beachte, dass man die vorige Helmholtz-Gleichung auch als Eigenwertproblem für den Laplace-Operator

$$-\Delta U = \omega^2 U$$

interpretieren kann. In Dimension $n = 1$ ergeben sich hier wieder die Grundschwingungen als Fundamentalsystem.

2.4.4 Energiemethoden

Die Rolle von Energiemethoden ist bei der Wellengleichung anders als noch bei der Wärmeleitungsgleichung. Statt Energie-Dissipation erhält man vielmehr eine Energie-Erhaltungseigenschaft für Lösungen $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ der Wellengleichung (2.32), bestehend aus einer Gesamtenergie und kinetischer Energie:

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\partial_t u(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2] dx.$$

Für die Zeitableitung von $t \mapsto E(u(t))$ folgt nämlich

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t u(t) \partial_{tt}^2 u(t) + \nabla u(t) \cdot \nabla(\partial_t u)(t)] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t) [\partial_{tt}^2 u(t) - \Delta u(t)] dx = 0,$$

wobei wir angenommen haben, dass die Anfangswerte u_0 und v_0 in (2.33) kompakten Träger haben. (Hier sieht man auch, wie man auf die Definition der Energie kommt: Man multipliziert die Wellengleichung mit $\partial_t u(t)$ und integriert partiell.)

Insbesondere gilt die Energie-Erhaltung $E(u(t)) = E(u(0))$ für alle $t > 0$. Also behalten Lösungen ihre Energie $E(u(t))$ für die gesamte Zeit-Betrachtung, und ein Vorgehen zum Langzeitverhalten wie bei der Wärmeleitungsgleichung ist aussichtslos. Tatsächlich konvergiert die Lösung der Wellengleichung (2.32) für $t \rightarrow \infty$ im Allgemeinen auch nicht gegen eine stationäre Lösung. Dies passiert nur mit zusätzlicher *Dämpfung* (physikalisch: z.B. Reibung) der Form

$$\partial_{tt}^2 u + \delta \partial_t u = \Delta u$$

mit einem $\delta > 0$ in der Gleichung.

Allerdings lässt sich die Eindeutigkeit von Lösungen der Wellengleichungen noch aus der Energie-Erhaltung folgern. Für letzteres genügt es nämlich, $u(0) = u_0 = \partial_t u(0) = v_0 = 0$ anzunehmen; dann ist $E(u(t)) = E(u(0)) = 0$ und es bleibt auch $u(t) = 0$ für alle $t > 0$. (Wieso?)

Wir hatten im Zuge der d'Alembert-Formel schon die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für Lösungen der Wellengleichungen beobachtet, ganz ähnlich zur Transportgleichung. Wir präzisieren das mittels Energiemethoden noch etwas. Bei der Wellengleichung passiert die Informations-Ausbreitung nur auf einem linear in der Zeit anwachsenden Kegel, vgl. (2.35). Wir nehmen dazu an, dass $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } v_0 \subseteq B_R(0)$, also

$$u_0(x) = 0, \quad v_0(x) = 0 \quad \text{wenn } |x| \geq R, \quad (2.38)$$

gilt und zeigen, dass dann für eine Lösung der Wellengleichung auch folgt:

$$u(x, t) = \partial_t u(x, t) = 0 \quad \text{wenn } |x| \geq R + t,$$

also $\text{supp } u(t) \cup \text{supp } \partial_t u(t) \subseteq B_{R+t}(0)$. Sprich, die in u_0 und v_0 enthaltene Information verbreitet sich nur mit endlicher Geschwindigkeit.

Dazu definieren wir

$$e(t) := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} [|\partial_t u(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2] dx.$$

Wir schreiben $R_t := \frac{R+t}{R}$. Mit der Transformation $y = R_t^{-1}x$ erhalten wir ein Integral auf einem fixen Gebiet:

$$e(t) = (R_t)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_t}(0)} \left[|\partial_t u(R_t y, t)|^2 + |\nabla u(R_t y, t)|^2 \right] dy.$$

Das hat den Vorteil, dass wir hier nicht in der zu integrierenden Menge bzgl. t differenzieren müssen, sondern wie üblich per Vertauschen von Differentiation und Integration verfahren können:

$$\begin{aligned} e'(t) &= \frac{n e(t)}{R+t} + 2(R_t)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_t}(0)} \partial_t u(R_t y, t) \nabla \partial_t u(R_t y, t) \cdot \frac{y}{R} dy \\ &\quad + 2(R_t)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_t}(0)} \nabla u(R_t y, t) \cdot \left[(\nabla^2 u)(R_t y, t) \frac{y}{R} \right] dy \\ &\quad + 2(R_t)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_t}(0)} \partial_t u(R_t y, t) \partial_{tt}^2 u(R_t y, t) dy \\ &\quad + 2(R_t)^n \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R_t}(0)} \nabla u(R_t y, t) \cdot \nabla \partial_t u(R_t y, t) dy. \end{aligned}$$

Wir transformieren die ausgeschriebenen Integrale zurück zu x :

$$\begin{aligned} e'(t) &= \frac{n e(t)}{R+t} + \frac{1}{R+t} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \nabla \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] \cdot x dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \left[\partial_t u(x, t) \partial_{tt}^2 u(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \partial_t u(x, t) \right] dx, \end{aligned}$$

und integrieren partiell, zunächst im ersten ausgeschriebenen Integral:

$$\begin{aligned} e'(t) &= \frac{n e(t)}{R+t} - \frac{n}{R+t} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \\ &\quad + \int_{\partial B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] \frac{\nu(x) \cdot x}{R+t} d\sigma(x) \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \left[\partial_t u(x, t) \partial_{tt}^2 u(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \partial_t u(x, t) \right] dx. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ergibt sich zu 0. Weiter ist beim Oberflächenintegral zu beachten, dass die äußere Normale an $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)$ durch $\nu(x) = \frac{-x}{R+t}$ gegeben ist und somit $\nu(x) \cdot \frac{x}{R+t} = -1$ gilt. Also verbleibt

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \left[\partial_t u(x, t) \partial_{tt}^2 u(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot \nabla \partial_t u(x, t) \right] dx \\ &\quad - \int_{\partial B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 \right] d\sigma(x), \end{aligned}$$

was wir uns als Ableitung des originalen $e(t)$ im Sinne einer Art Produktregel merken. Um nun noch ins Spiel zu bringen, dass u die Wellengleichung (2.32) löst, integrieren wir den ersten Term nochmals partiell:

$$\begin{aligned} e'(t) &= -2 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)} \partial_t u(x, t) \left[\partial_{tt}^2 u(x, t) - \Delta u(x, t) \right] dx \\ &\quad - \int_{\partial B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 + 2 \partial_t u(x, t) \nabla u(x, t) \cdot \nu(x) \right] d\sigma(x). \end{aligned}$$

Das Gebietsintegral verschwindet also klarerweise. Mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $|\nu(x)| = 1$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} e'(t) &\leq - \int_{\partial B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2 - 2 |\partial_t u(x, t)| |\nabla u(x, t)| \right] d\sigma(x) \\ &= - \int_{\partial B_{R+t}(0)} \left[|\partial_t u(x, t)| - |\nabla u(x, t)| \right]^2 d\sigma(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Also gilt ist e monoton fallend, insbesondere $0 \leq e(t) \leq e(0)$ für alle $t > 0$. Unter der Annahme (2.38) gilt aber $e(0) = 0$ und entsprechend $e(t) = 0$ für alle $t > 0$. Es folgt $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+t}(0)$, da $u(0) = u_0 = \partial_t u(0) = v_0 = 0$ auf der größeren Menge $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ war.

Wir halten das Ergebnis noch formell fest, in der “umgekehrten” Formulierung mit Bezug auf den Lichtkegel (2.35):

Satz 2.27: Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ eine Lösung der Wellengleichung (2.32) mit Anfangswerten (2.33), und seien $u_0 = v_0 \equiv 0$ auf einer Kugel $B_{t_0}(x_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 > 0$. Dann gilt $u \equiv 0$ auf dem Kegel

$$C(x_0, t_0) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_0] : |x - x_0| \leq t_0 - t \right\}$$

Sind die Anfangswerte also identisch null auf einer Kugel $B \subseteq \mathbb{R}^n$, so impliziert dies bereits, dass die Lösung auf einem Kegel in Raum-Zeit mit Basis B identisch null ist; die Höhe des Kegels hängt mit dem Radius der Kugel zusammen. Insbesondere hat die Information “außerhalb” B keinen Einfluss auf die Lösung u innerhalb dieses Kegels.

3 Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel werden wir uns grundlegend mit der Lösbarkeit von elliptischen PDGLen zweiter Ordnung in einem modernen funktionalanalytischen Sinne beschäftigen. Hierzu betrachten wir grundsätzlich in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \tag{3.1}$$

wobei der lineare Differentialoperator zweiter Ordnung L gegeben sei durch:¹

$$(Lu)(x) := - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x)u(x), \tag{3.2}$$

bzw. in *Divergenzform*

$$Lu(x) := - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u(x)) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x)u(x), \tag{3.3}$$

mit geeigneten Koeffizientenfunktionen (a_{ij}) , (b_i) und c , die jeweils $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ abbilden. Wir interpretieren die Sammlung der (a_{ij}) und (b_i) oft als Matrix $a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. (Spalten-) Vektor $b = (b_1, \dots, b_n)^\top: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mit dieser Interpretation lässt sich die Divergenzform (3.3) auch kompakt schreiben:

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu.$$

Je nach Zielsetzung ist die eine oder die andere Formulierung für L vorteilhaft. Wenn wir uns mit Existenzresultaten beschäftigen, erweisen sich Gleichungen in Divergenzform als einfacher zu behandeln. Falls die Koeffizienten höchster Ordnung (a_{ij}) stetig differenzierbar sind, so lassen sich beide Formulierungen in eine Version der jeweilig anderen umformen.

Die grundlegende Bedingung für unsere im weiteren entwickelte Theorie, die den Gleichungen auch ihren Namen gibt, ist die folgende:

Definition 3.1: Gleichmäßig elliptisch

Der partielle Differentialoperator L (3.2) bzw. (3.3) heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls eine Konstante $\theta > 0$ existiert, so dass

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2, \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

¹Wir schreiben hier im Weiteren $\partial_i := \partial_{x_i}$; das wird nicht zu Konfusion führen, da keine Zeitvariable t mehr präsent ist.

Beachte, dass

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = \xi^\top a(x) \xi \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n)$$

gilt. Für $a(\cdot)$ symmetrisch bedeutet dass, dass jedes $a(x)$ positiv definit ist, und für die kleinsten Eigenwerte $\lambda_{\min}(x) \geq \theta$ gilt. Die Bezeichnung *gleichmäßig elliptisch* erklärt sich weiter wie folgt: Wenn (3.4) gilt, dann beschreibt die Menge

$$E_\mu(x) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi^\top a(x) \xi = \mu \right\}$$

für jedes $x \in \Omega$ und jedes $\mu > 0$ einen Ellipsoiden in \mathbb{R}^n .

Beispiel

Als Standardbeispiel für (3.1) haben wir bereits die Poisson-Gleichung kennengelernt:

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = -\Delta u = f,$$

und für diese ist $a_{ij} = \delta_{ij}$, also a die $n \times n$ Einheitsmatrix, sowie $b = 0$ und $c = 0$. Insbesondere ist $L = -\Delta$ gleichmäßig elliptisch mit Konstante $\theta = 1$. Die Ellipsoiden $E_\mu(x)$ entsprechen dann Kreisen vom Radius $\sqrt{\mu}$.

Das eigentliche (idealistische) Ziel dieses Abschnittes wäre es, die Existenzresultate für die Poissongleichung $-\Delta u = f$ auf allgemeine, gleichmäßig elliptische Gleichungen zweiter Ordnung in Divergenzform zu verallgemeinern. Für den Spezialfall $L = -\Delta$ mussten wir schon vergleichsweise aufwändige Techniken bemühen, um die Existenz einer klassischen Lösung zu zeigen, so dass man erwarten kann, dass die Existenz für allgemeinere Differentialoperatoren ungleich schwieriger zu zeigen sein wird. Ausserdem ist unter schwachen Voraussetzungen an die Koeffizienten und die Inhomogenität (die z.B. insbesondere unstetig sein könnten) klar, dass i.A. gar keine klassische Lösung existieren *kann*.

Unsere Strategie zur Analyse partieller Differentialgleichungen, insbesondere also auch elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung, ist daher die Folgende:

1. Definition eines verallgemeinerten Ableitungsbegriffes, die *distributionelle* und *schwache Ableitung*,
2. Herleitung einer entsprechend angepassten *schwachen Formulierung* der Problemstellung in Bezug auf geeignete Funktionenräume (Sobolev-Räume),
3. Lösung der schwachen Formulierung (Beweis von Existenz und gegebenenfalls Eindeutigkeit) mit Mitteln der Funktionalanalysis.

Bei diesem Programm ist das Zusammenspiel aller drei Punkte wichtig: Die Definition der verallgemeinerten Ableitungsbegriffe und die entsprechende schwache Formulierung des Problems müssen natürlich zusammenpassen. Zudem muss die schwache Formulierung zugänglich für Techniken aus der Funktionalanalysis, wie z.B. den fundamentalen *Satz von Lax-Milgram* (Satz 3.2), sein. Insbesondere darf der Lösungsbegriff nicht *zu* allgemein sein, da sonst keine Hoffnung auf Eindeutigkeit einer Lösung bestehen wird. Dies bedeutet zum Beispiel, dass wir als designierten Lösungs-Funktionenraum einerseits einen vollständigen Raum nehmen

müssen und dass sich andererseits aus der Gleichung bzw. Problemformulierung geeignete Abschätzungen bezüglich dieser Normen ergeben sollten, so wie wir es bereits bei den behandelten Energiemethoden gesehen haben. Da letzteres im wesentlichen ausschließlich für “Integral-Normen” möglich ist, werden sich genau die Sobolevräume als geeignete Wahl herausstellen. Diese beinhalten Funktionen, deren verallgemeinerte Ableitungen integrierbar sind, also in einem Lebesgue-Raum liegen. In den Sobolevräumen lässt sich auch die Lücke aus Satz 2.15 (Energiminimierung für Lösungen des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$) schließen und tatsächlich Existenz einer solchen, dann Energie-minimierenden, Lösung zeigen. In diesem Sinne sind die Sobolevräume exakt die korrekte Verallgemeinerung.

Hat man nun die Existenz und ggf. Eindeutigkeit einer Lösung in einem geeignet verallgemeinerten Sinne bewiesen, gilt es noch, Techniken zu entwickeln, um diese schwachen Lösungen genauer zu untersuchen, die im Allgemeinen nur abstrakt gegeben sind, und für die man auch *keine* konkrete Darstellungsformeln mehr hat! Insbesondere ist man dabei an Kriterien an die Koeffizienten im Problem und an die Inhomogenität interessiert, unter denen sich zeigen lässt, dass schwache Lösungen tatsächlich stetig, klassisch differenzierbar oder sogar klassische Lösungen des Problems sind. Dies führt auf die sogenannte *Regularitätstheorie*.

Zunächst benötigen wir einige funktionalanalytische Grundlagen, die wir zu Beginn diskutieren.

3.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer kleinen funktionalanalytischen Wiederholung:

- (FA1) Ein *normierter Raum* X ist ein (hier: reeller) Vektorraum—für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha x + \beta y \in X$ —mit einer Norm, d.h. einer Abbildung $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, sodass $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, sowie positive Homogenität $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, und die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ gilt. Diese Norm definiert die Topologie und den Konvergenzbegriff auf X . Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X heißen *äquivalent*, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$C^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2 \quad (x \in X)$$

gilt. Diese erzeugen dieselbe Topologie und sind daher als gleichwertig anzusehen.

- (FA2) Ein normierter Raum X heißt *separabel*, wenn es eine *dichte* abzählbare Teilmenge von X gibt, sprich, eine Menge $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq X$, so dass $X = \overline{\text{span}\{x_1, x_2, \dots\}}$.
- (FA3) Ein *Banachraum* X ist ein vollständiger normierter Raum, d.h. jede Cauchyfolge in X ist auch konvergent.
- (FA4) Ein *Operator* $A: X \rightarrow Y$ ist eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Der Operator ist stetig genau dann, wenn er *beschränkt* ist, also wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Die *Operatornorm* $\|A\|_{X \rightarrow Y} = \|A\|$ ist die bestmögliche Konstante:

$$\|A\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Ax\|_Y = \inf \left\{ C \geq 0: \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, x \in X \right\},$$

und es gilt immer $\|Ax\|_Y \leq \|A\|_{X \rightarrow Y} \|x\|_X$. Mit der Operatornorm ist der Raum der linearen Operatoren $\mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ wieder ein normierter Raum. Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist es $\mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ auch.

- (FA5) Einen *injektiven* stetigen Operator $A \in \mathcal{L}(X \rightarrow Y)$ zwischen normierten Vektorräumen X und Y nennen wir auch *Einbettung* (**embedding**) und sagen, dass X *eingebettet* in Y ist, da man X eindeutig mit der Teilmenge $AX \subseteq Y$ identifizieren kann. Wir schreiben $X \hookrightarrow Y$, wenn in diesem Kontext die gewählte Einbettung klar ist. (Im Normalfall ist es die Identitätsabbildung.)
- (FA6) Eine spezielle Klasse stetiger linearer Operatoren $A: X \rightarrow Y$ ist die der *kompakten* Operatoren. Für einen solchen ist das Bild $AB_R(0)$ einer jeden Kugel $B_R(0)$ in X mit Radius $R > 0$ relativ kompakt. Insbesondere hat (Ax_k) eine in Y konvergente Teilfolge, wenn (x_k) beschränkt in X ist.
- (FA7) Ein *lineares Funktional* $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung nach \mathbb{R} als Spezialfall eines Operators mit $Y = \mathbb{R}$. Ein lineares Funktional ℓ ist also stetig, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $|\ell(x)| \leq C\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Den Raum aller stetigen linearen Funktionale $\mathcal{L}(X \rightarrow \mathbb{R})$ auf X nennen wir den *Dualraum* X^* . Mit der Operatornorm ist dieser immer ein Banachraum. Wir schreiben oft

$$\ell(x) = \langle \ell, x \rangle_{X^* \times X} = \langle \ell, x \rangle \quad (\ell \in X^*, x \in X)$$

und mit dieser Schreibweise gilt die *verallgemeinerte Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$|\langle \ell, x \rangle| \leq \|\ell\|_{X^*} \|x\|_X.$$

- (FA8) Sind X, Y Banachräume sowie $A: X \rightarrow Y$ linear und stetig, dann ist der (eindeutig bestimmte) *adjungierte Operator* $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ (**adjoint operator**) definiert durch

$$(A^*y)(x) = \langle A^*y, x \rangle_{X^* \times X} := \langle y, Ax \rangle_{Y^* \times Y} = y(Ax) \quad (x \in X, y \in Y).$$

- (FA9) Ein *Hilbertraum* X ist ein Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt erzeugt wird: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, wobei das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X = (\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine bilineare und symmetrische Abbildung ist, deren induzierte quadratische Form positiv definit ist, d.h. es gilt $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- (FA10) In einem Hilbertraum X sind alle abgeschlossenen Unterräume U *komplementiert*, genauer gilt $X = U \oplus U^\perp$, wobei das *orthogonale Komplement* U^\perp aus allen $x \in X$ besteht, die senkrecht auf U stehen: $\langle x, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$.
- (FA11) In Hilberträumen gilt der fundamentale *Riesz'sche Darstellungssatz* (**Riesz representation theorem**): Jedem linearen Funktional $\ell \in X^*$ kann ein eindeutiges Element $x_\ell \in X$ zugeordnet werden, so dass

$$\ell(x) = \langle \ell, x \rangle_{X^* \times X} = \langle x_\ell, x \rangle_X \quad (x \in X)$$

gilt. Natürlich gilt wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung auch die Umkehr, d.h. für jedes $y \in X$ ist $\ell_y(x) := \langle y, x \rangle$ ein stetiges lineares Funktional; tatsächlich ist die Korrespondenz auch isometrisch: $\|\ell\|_{X^*} = \|x_\ell\|_X$, und im Falle eines Hilbertraumes X folgt, dass X und X^* isometrisch isomorph sind.

(FA12) Eine *Bilinearform* $B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine in jeder Komponente lineare Abbildung. Ein Skalarprodukt ist ein Beispiel einer Bilinearform, eine allgemeine Bilinearform muss im Gegensatz zum Skalarprodukt aber nicht symmetrisch sein. Die Bilinearform B ist stetig, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $B(x, y) \leq C\|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Wir hatten in Abschnitt 1.1.2 schon diverse Funktionenräume kennengelernt und bei den meisten erwähnt bzw. festgestellt, dass sie Banachräume sind. Mit unserem nun erweiterten Vokabular sammeln wir noch einige weitere Eigenschaften ein, wobei wir uns hier auf die Lebesgue-Räume auf einer Menge $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränken:

- Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\Upsilon)$ ein Banach-Raum. (*Satz von Fischer-Riesz*, wichtiges Teilresultat: jede in $L^p(\Upsilon)$ konvergente Folge (u_k) hat eine Teilfolge (u_{k_ℓ}) , die fast überall *punktweise* konvergiert, d.h. für fast jedes fixen $x \in \Upsilon$ konvergiert $(u_{k_\ell}(x))$ in \mathbb{R} .)
- Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt die *Hölder-Ungleichung*

$$\int_{\Upsilon} f(x)g(x) \, dx \leq \|f\|_{L^p(\Upsilon)} \|g\|_{L^q(\Upsilon)} \quad (f \in L^p(\Upsilon), g \in L^q(\Upsilon)).$$

Aus dieser kann man zum Beispiel zeigen, dass aus $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ folgt, dass $L^p(\Upsilon) \cap L^q(\Upsilon) \subseteq L^r(\Upsilon)$ gilt. (Wie?) Tatsächlich gilt $L^p(\Upsilon) \cap L^q(\Upsilon) \hookrightarrow L^r(\Upsilon)$, wenn man den Schnittraum mit der Summe der einzelnen Normen versieht.²

- Für $|\Upsilon| < \infty$, insbesondere also für eine beschränkte Menge Υ , gilt ebenfalls wegen der Hölder-Ungleichung $L^p(\Upsilon) \hookrightarrow L^q(\Upsilon)$ für $1 \leq q \leq p \leq \infty$, denn aus dieser folgt

$$\|u\|_{L^q(\Upsilon)} \leq |\Upsilon|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Upsilon)} \quad (u \in L^p(\Upsilon)).$$

Für $|\Upsilon| = \infty$, insbesondere also $\Upsilon = \mathbb{R}^n$ ist diese Einbettung *falsch*.

- Für $p = 2$ ist $L^2(\Upsilon)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\Upsilon)} := \int_{\Upsilon} u(x)v(x) \, dx.$$

- Für $1 \leq p < \infty$ kann der Dualraum von $L^p(\Upsilon)$ mit $L^q(\Upsilon)$ identifiziert werden, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. $(L^p(\Upsilon))^* \simeq L^q(\Upsilon)$ im Sinne von isometrisch isomorph. Die linearen Funktionale auf $L^p(\Upsilon)$ sind dann genau von der Form

$$\ell(u) = \int_{\Upsilon} u(x)v(x) \, dx \quad (u \in L^p(\Upsilon))$$

für ein $v \in L^q(\Upsilon)$. Mit der Hölder-Ungleichung überzeugt man sich leicht von der Stetigkeit solcher linearen Funktionale.

- Für $p = \infty$ ist $L^1(\Upsilon) \subsetneq (L^\infty(\Upsilon))^*$, d.h. der Dualraum von $L^\infty(\Upsilon)$ ist echt größer als $L^1(\Upsilon)$.

²Hier (und auch sonst oft) ist die *Young-Ungleichung* nützlich: $ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^s}{s}$ für $a, b \geq 0$ und $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

- Für $1 \leq p \leq \infty$ folgt aus der Konvergenz $u_n \rightarrow u$ auch, für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, die *schwache* Konvergenz (auch: $u_n \rightharpoonup u$)

$$\int_{\Upsilon} u_n(x)v(x) \, dx \quad \longrightarrow \quad \int_{\Upsilon} u(x)v(x) \, dx \quad (v \in L^q(\Upsilon)) \quad (3.5)$$

- Für $1 < p < \infty$ hat eine in $L^p(\Upsilon)$ beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge im Sinne von (3.5).
- Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\Upsilon)$ separabel, und weiterhin ist $C_0^\infty(\Upsilon)$ dicht in $L^p(\Upsilon)$.

3.1.1 Der Satz von Lax-Milgram

Unser übergeordnetes Ziel ist es, ein Lösungskonzept für Randwertprobleme elliptischer Differentialoperatoren zu erarbeiten. Der in diesem Abschnitt vorgestellte Satz von Lax-Milgram liefert ein (bzw. *das*) funktionalanalytisches Mittel, welches uns später Existenz (und Eindeutigkeit) von sogenannten schwachen Lösungen elliptischer Gleichungen liefern wird. Dieser Satz (aus historischen Gründen auch oft: *Lax-Milgram Lemma*) stellt die Quintessenz des in der Einleitung dieses Kapitels vorgestellten Programmes dar und ist von fundamentaler Bedeutung.

Satz 3.2: Lax-Milgram

Sei X ein Hilbertraum und $B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, welche die folgenden Bedingungen erfüllt: Es gibt Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass

- (i) $|B(x, y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in X$,
- (ii) $\beta \|x\|^2 \leq B(x, x)$ für alle $x \in X$.

Dann hat für jedes beschränkte lineare Funktional $f \in X^*$ die Gleichung

$$B(x, y) = \langle f, y \rangle_{X^* \times X} \quad (y \in X) \quad (3.6)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $x = x_f \in X$. Insbesondere hängt x_f linear und stetig von f ab, mit der Abschätzung

$$\|x_f\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{X^*}.$$

Wir hatten schon bemerkt (FA12), dass die erste Bedingung an B die Stetigkeit von B impliziert. Die zweite Bedingung fordert gleichmäßige positive Definitheit von B . Man beachte aber, dass nicht gefordert ist, dass B symmetrisch ist. In diesem Fall würde B tatsächlich ein Skalarprodukt auf X induzieren und die Behauptung folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz (FA11).

Beweis von Satz 3.2. Für jedes feste $x \in X$ ist die Abbildung $y \mapsto B(x, y)$ ein beschränktes lineares Funktional auf X . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es also ein eindeutiges $w \in X$, abhängig vom gegebenen x , so dass

$$B(x, y) = (w, y)_X \quad (y \in X)$$

gilt. Wir definieren die Zuordnung $A: X \rightarrow X$ gegeben durch $Ax := w$. Die Abbildung A ist der der Bilinearform B zugeordnete Operator, definiert über die fundamentale Identität

$$(Ax, y)_X = B(x, y) \quad (y \in X)$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert weiterhin genau ein $v = v_f \in X$, so dass

$$\langle f, y \rangle_{X^* \times X} = (v, y)_X \quad (y \in X).$$

Also ist Gleichung (3.6) äquivalent zu

$$(Ax, y)_X = B(x, y) \stackrel{!}{=} \langle f, y \rangle_{X^* \times X} = (v, y)_X \quad (y \in X),$$

und das ist genau dann der Fall, wenn $Ax = v$ ist. (Warum?) Wir zeigen im Weiteren, dass A bijektiv ist; dann ist die gesuchte Lösung von (3.6) gerade $A^{-1}v_f$. Das passiert in den folgenden Schritten:

Schritt 1: A ist linear, denn für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in X$ rechnet man für jedes $y \in X$ sofort nach, dass

$$\begin{aligned} (A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y)_X &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) \\ &= \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y) \\ &= \lambda_1 (Ax_1, y)_X + \lambda_2 (Ax_2, y)_X = (\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2, y)_X. \end{aligned}$$

Schritt 2: Die Beschränktheit von A folgt sofort aus der von B :

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax)_X = B(x, Ax) \leq \alpha \|x\| \|Ax\| \implies \|Ax\| \leq \alpha \|x\|.$$

Schritt 3: Die Injektivität von A kommt aus der Definitheit von B :

$$\beta \|x\|^2 \leq B(x, x) = (Ax, x)_X \leq \|x\| \|Ax\| \implies \beta \|x\| \leq \|Ax\|,$$

also folgt aus $Ax = 0$ auch $x = 0$.

Schritt 4: Es bleibt zu zeigen, dass A surjektiv ist. Das machen wir in zwei Teilschritten: Einerseits zeigen wir, dass das Bild $R(A) = AX$ abgeschlossen ist, und andererseits, dass es dicht ist. Daraus folgt dann $AX = X$, also Surjektivität.

Schritt 4a (Abgeschlossenheit): Sei (Ax_k) eine Folge, die gegen ein $y \in X$ konvergiert. Dann ist $y \in R(A)$, denn wegen

$$\|Ax_k - Ax_\ell\| = \|A(x_k - x_\ell)\| \geq \beta \|x_k - x_\ell\| \quad (k, \ell \in \mathbb{N})$$

ist (x_k) eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, hat (x_k) einen Grenzwert $x \in X$, und mit der Stetigkeit von A folgt $Ax = y$, also $y \in R(A)$.

Schritt 4b (Dichtes Bild): Wir stellen zunächst fest, dass allgemein für einen Unterraum $U \subseteq X$ gilt: falls aus $(u, x) = 0$ für alle $u \in U$ folgt, dass $x = 0$ sein muss, dann ist U dicht. Denn wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts impliziert die Annahme, dass das orthogonale Komplement $\overline{U}^\perp = \{0\}$ ist. Nach (FA10) folgt dann aber $X = \overline{U} \oplus \overline{U}^\perp = \overline{U}$. Also ist U dicht.

Wir wenden die Feststellung auf den Unterraum $R(A)$ an und zeigen, dass aus $(Ax, z)_X = 0$ für alle $x \in X$ schon $z = 0$ folgt. Das sieht man aber direkt mit der Definitheit von B , denn

$$(Az, z) = B(z, z) \geq \beta \|z\|^2 > 0 \quad (0 \neq z \in X).$$

Also ist $R(A)$ dicht.

Damit haben wir gezeigt, dass $A \in \mathcal{L}(X)$ bijektiv ist, also existiert der inverse Operator $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Die Lösung von (3.6) ist entsprechend gegeben durch $x = A^{-1}v_f$, und da $f \mapsto v_f$ aus dem Riesz'schen Darstellungssatz eine lineare Isometrie ist, ist $f \mapsto x$ auch stetig von X^* nach X . Die behauptete Abschätzung der Operatornorm von A^{-1} folgt wieder aus der Definitheit, denn für die Lösung $x = x_f$ gilt

$$\beta \|x\|^2 \leq B(x, x) = \langle f, x \rangle \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X,$$

woraus $\|x\|_X \leq \beta^{-1} \|f\|_{X^*}$ folgt. □

3.1.2 Distributionelle Ableitungen

Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ wieder ein Gebiet. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega),$$

dem zu Anfang bereits definierten Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω , den sogenannten *Testfunktionen*.³

Definition 3.3: Distribution

Eine *Distribution* ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$. Die Gesamtheit der Distributionen auf Ω wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Achtung: Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ der Testfunktionen ist **kein normierter Raum**. Entsprechend gelten die schönen funktionalanalytischen Aussagen zu Beginn des Kapitels *nicht* für diesen Raum. Es bliebe zu präzisieren, was in diesem Kontext ein "stetiges" lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ wäre. Tatsächlich ist eine lineare Abbildung $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante C existiert, so dass

$$|T(\varphi)| \leq C \sup \left\{ |D^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N \right\} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{supp } \varphi \subseteq K).$$

Beispiel: Reguläre und singuläre Distributionen

Jede lokal integrierbare Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (und damit jede Funktion in einem $L^p(\Omega)$ -Raum) induziert eine Distribution, da

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist. Eine Distribution T der vorigen Form nennt

³Diese Bezeichnung hat historische Gründe und geht zurück auf den Vater der Distributionentheorie, Laurent Schwartz, der für die systematische Ausarbeitung dieser 1950 mit der Fields-Medaille geehrt wurde.

man auch *regulär*. Die erzeugende Funktion einer regulären Distribution ist eindeutig. (Fundamentallemma der Variationsrechnung!)

Aber auch allgemeinere Objekte als Funktionen sind (dann: *singuläre*) Distributionen. Wir haben schon die Dirac- δ -Distribution δ_y zentriert bei $y \in \Omega$ kennengelernt:

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle := \varphi(y) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

man kann aber zum Beispiel auch eine Dirac- δ -Distribution einer *Fläche* $\Gamma \subseteq \bar{\Omega}$ betrachten:

$$\langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi \, d\sigma(x) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Insgesamt gilt also:

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$$

Die Grundidee von Distributionen ist, dass die Testfunktionen quasi die bestmöglichen Funktionenklasse ist—abgesehen von analytischen Funktionen, die aber *zu* einschränkend fantastisch sind—, was umgekehrt heißt, dass *wenn* ein lineares Funktional für *irgendeine* Funktionenklasse etwas sinnvolles tun soll, es dies sicher auch für die Testfunktionen tun sollte. In diesem Sinne sind die Distributionen die natürliche Obermenge für alle linearen (stetigen) Funktionale auf Funktionenräumen.

Tatsächlich kann man die Güte der Testfunktionen nun auch nutzen, um eine verallgemeinerte Ableitung, die *distributionelle Ableitung*, zu definieren. Dies funktioniert wieder über lineare Funktionale, wobei man eine Analogie zur partiellen Integration benutzt.

Dazu beobachtet man, dass die von einer Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktionen u erzeugte reguläre Distribution mittels partieller Integration folgende Relation erfüllt:

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle := \int_\Omega \partial_i u(x) \varphi(x) \, dx = - \int_\Omega u(x) \partial_i \varphi(x) \, dx = - \langle u, \partial_i \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

wobei die bei der partiellen Integration entstehenden Randterme wegen des kompakten Trägers von φ wegfallen, und natürlich auch $\partial_i \varphi$ wieder eine Testfunktion ist, wenn φ eine ist. Nun wählt man gerade die äußerste Gleichheit als *Definition* der distributionellen Ableitung:

Definition 3.4: Distributionelle Ableitung

Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dann heisst $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert durch

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \quad (3.7)$$

distributionelle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$ von η .

Man beachte, wieder dass wegen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ auch $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt und damit die rechte Seite von (3.7) wohldefiniert ist.

Für allgemeine Distributionen erscheint die vorige Definition möglicherweise zunächst ein wenig konstruiert. Zum Beispiel wäre für die Dirac- δ Distribution δ_0 auf $\mathcal{D}(-1, 1)$ dann die

distributionelle Ableitung δ'_0 gegeben durch

$$\langle \delta'_0, \varphi \rangle = -\langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Aber für reguläre Distributionen erhalten wir exakt die zu erwartende Verallgemeinerung des üblichen Ableitungsbegriffes:

Beispiel 3.5

Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ und betrachte die stückweise definierte Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{für } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Dann ist die distributionelle Ableitung u' von u gegeben durch

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Dies sieht man folgendermaßen. Für $\varphi \in \mathcal{D}(0, 2)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &:= -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^1 x\varphi'(x) dx - \int_1^2 \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \int_0^2 v(x)\varphi(x) dx = \langle v, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Also hat u eine distributionelle Ableitung, die selbst eine reguläre Distribution ist, erzeugt von v . (Dies nennt man auch *schwache* Ableitung.) Nun betrachten wir stattdessen

$$w(x) = \begin{cases} x, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 3, & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

und rechnen analog:

$$\begin{aligned} \langle w', \varphi \rangle &:= -\langle w, \varphi' \rangle = -\int_0^1 x\varphi'(x) dx - 3 \int_1^2 \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx + 2\varphi(1) \\ &= \int_0^2 v(x)\varphi(x) dx + 2\varphi(1). \end{aligned}$$

Also ist hier die distributionelle Ableitung von w gegeben durch die Summe $w' = v + 2\delta_1$. Insbesondere ist w' diesmal *keine* reguläre Distribution. Verfolgt man den Ursprung der Dirac- δ -Distribution zurück, so sieht man, dass diese vom Sprung von w der Höhe 2 in $x = 1$ kommt. Das weist darauf hin, dass (wenigstens im Eindimensionalen) nur stetige Funktionen auch schwache Ableitungen haben werden, also distributionelle Ableitungen, die selbst regulär sind.

Da wir die distributionelle Ableitung ja schon als Verallgemeinerung einer Relation für die klassische Ableitung stetig differenzierbarer Funktionen motiviert und eingeführt haben, ist

klar, dass die distributionelle Ableitung konsistent mit der klassischen Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion ist, wie man es auch hoffen würde.

Genauer folgt per Definition, dass die distributionelle Ableitung einer von einer stetig differenzierbaren Funktionen u erzeugte reguläre Distribution auch genau die von der entsprechenden Ableitung von u erzeugte reguläre Distribution ist. Im Gegensatz zum klassischen Ableitungsbegriff sind nun aber alle Distributionen beliebig oft differenzierbar. Außerdem gilt immer der Satz von Schwarz, nach dem die Reihenfolge der distributionellen partiellen Ableitungen beliebig vertauschbar ist.

Bemerkung 3.6: Temperierte Distributionen

Distributionstheorie kann auch auf den ganzen \mathbb{R}^n übertragen werden; statt bzw. ergänzend zu den Testfunktionen betrachtet man hier aber die *schnell abfallenden Funktionen*, bei denen jede Ableitung für $x \rightarrow \infty$ schneller fällt als jedes Polynom $|x|^{-m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Der Dualraum dieses Funktionenraums wird *temperierte Distributionen* genannt.

Zum Abschluss erwähnen wir noch folgendes Lemma über die distributionelle Ableitung regulärer Distributionen, das wir in seiner einfachsten Form schon verwendet und erwähnt haben.

Lemma 3.7: Verallgemeinertes Fundamentallema der Variationsrechnung

Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}$. Falls $D^\alpha u = 0$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| = k$, dann ist u fast überall gleich einem Polynom der Ordnung höchstens $k - 1$.

Im Fall $k = 0$ besagt das eigentliche *Fundamentallema der Variationsrechnung*, dass, falls die von u erzeugte reguläre Distribution gleich 0 ist, also, falls

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

dann folgt auch $u(x) = 0$ für fast jedes $x \in \Omega$. (Das ist die korrekte Interpretation eines Polynoms vom Grad -1 .)

3.2 Sobolevräume

Für die elliptischen PDGLen, die wir untersuchen wollen, stellen sich die sogenannten Sobolevräume als die natürlichen Funktionenräume heraus. Diese Räume werden über die distributionellen Ableitungen eingeführt, indem gefordert wird, dass die verallgemeinerten Ableitungen regulär sind, und deren erzeugende Funktionen wieder geeignet integrierbar sind:

Definition 3.8: Sobolevräume

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der *Sobolevraum* $W^{k,p}(\Omega)$ ist definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, & \text{für } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Die Sobolev-Räume bestehen leiten sich also von den Lebesgue-Räumen ab, wie man auch schon mit der Definition der Normen ablesen kann. Distributionellen Ableitungen, die regulär sind, nennt man auch *schwache Ableitungen*. (Tatsächlich ist dieser etwas konkretere Begriff weiter verbreitet als der der distributionellen Ableitung.)

Wir sammeln einige Tatsachen über die gerade definierten Sobolevräume. Dabei nutzen wir hier und im Weiteren auch $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ als abkürzende Schreibweise.

- Durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

wird eine äquivalente Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ definiert.

- Die Halbnorm

$$|u|_{k,p} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}$$

verschwindet auf Polynomen vom Grad kleiner oder gleich $k - 1$, siehe Lemma 3.7).

- Eine Folge $(u_k) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ konvergiert *genau dann* gegen u , wenn $D^\alpha u_k \rightarrow D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ für jeden Multiindex $|\alpha| \leq k$.
- Für $1 \leq p < \infty$ ist $W^{k,p}(\Omega)$ separabel.
- Der Ableitungsoperator $D^\alpha: W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$, der $u \mapsto D^\alpha u$ abbildet, ist linear und stetig für jeden Multiindex $|\alpha| \leq k$.
- Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt $\xi u \in W^{k,p}(\Omega)$ und die *Produktregel*:

$$D^\alpha(u\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!},$$

wobei $\alpha! := \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$ für den n -Multiindex α und $\beta \leq \alpha$ heisst: $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \dots, n$. Eine schärfere Formulierung, die wir später brauchen, findet sich in Lemma 3.52.

- Die *lokalen Sobolev-Räume* definiert man analog zu den Lebesgue-Versionen durch

$$u \in W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Lambda) \text{ für jedes } \Lambda \Subset \Omega \right\}.$$

Viele Eigenschaften der Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ lassen sich sehr einfach auf Sobolevräume übertragen, wie zum Beispiel im Folgenden.

Satz 3.9: Vollständigkeit der Sobolevräume

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum.

Beweis. Wir beweisen induktiv. Den Fall $k = 1$ behandeln wir wie folgt: Sei (u_n) eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann sind nach Definition (u_n) und $(\partial_j u_n)$ jeweils Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$, für $j = 1, \dots, n$. Mit der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ folgt, dass diese konvergieren, also

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ in } L^p(\Omega), \quad \partial_j u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v_j \text{ in } L^p(\Omega).$$

Es muss noch gezeigt werden, dass $\partial_j u = v_j \in L^p(\Omega)$. Für beliebige Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \partial_j u, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) \partial_j \varphi(x) \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_j u_n(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} v_j(x) \varphi(x) \, dx = \langle v_j, \varphi \rangle \end{aligned}$$

und somit folgt $v_j = \partial_j u$ im distributionellen Sinne. Damit konvergiert die Cauchyfolge (u_n) mit Grenzwert $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Also ist $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig und damit ein Banachraum. Das selbe Argument wiederholen wir induktiv für $k \geq 2$. \square

Bemerkung 3.10: Sobolev-Hilberträume

Im Fall $W^{k,2}(\Omega)$, also $p = 2$, erhält man, wie im Falle der Lebesgue-Räume, sogar einen *Hilbertraum*, üblicherweise mit der Bezeichnung $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx.$$

Speziell für $k = 1$ erhalten wir den fundamentalen (Hilbert-) Raum $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_1 := \int_{\Omega} \left[u(x)v(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j u(x) \partial_j v(x) \right] dx = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^n},$$

also die Summe aus L^2 -Skalarprodukten der Funktion und ihrer Ableitungen. Wie wir sehen werden, ist der Hilbertraum $H^1(\Omega)$ der wichtigste bei der Analysis linearer elliptischer Gleichungen. Sobolevräume für $p \neq 2$ verwendet man meist bei nichtlinearen Gleichungen.

3.2.1 Approximation mit glatten Funktionen

Wir zeigen als nächstes, dass wir Sobolevfunktionen durch glatte Funktionen approximieren können. Dazu kommen wieder die Mollifier zum Einsatz, siehe Definition 2.12. In Lemma 2.13 hatten wir bereits festgehalten, dass die Faltung $\eta_\varepsilon * u$ auch für $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ immer glatt ist. Tatsächlich gilt dies auch—bis auf einen Sicherheitsabstand zum Rand—auf einer offenen Menge U , zusammen mit den folgenden Approximationseigenschaften.

Lemma 3.11: Approximation durch Mollifier

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und setze $U_\varepsilon := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$. Für $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$, sei $u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$. Dann gilt:

- (i) $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$,
- (ii) $u^\varepsilon \rightarrow u$ punktweise fast überall in U für $\varepsilon \searrow 0$,
- (iii) wenn $u \in C(U)$, dann $u^\varepsilon \rightarrow u$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von U ,
- (iv) wenn $1 \leq p < \infty$ und $u \in L^p_{\text{loc}}(U)$, dann $u^\varepsilon \rightarrow u$ in $L^p(V)$ für jedes $V \Subset U$.

Der Sicherheitsabstand zu ∂U , der sich in der Menge U_ε widerspiegelt, liegt an der Definition der Faltung

$$(\eta_\varepsilon * u)(x) := \int_U \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) dy,$$

wobei wir schon genutzt haben, dass $\text{supp } \eta_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$ ist. Für den Integranden $u(x-y)$ mit $y \in B_\varepsilon(0)$ muss man aufpassen, dass auch noch $x-y \in U$ gilt, da u ja nur auf U definiert ist. Das sichert man eben genau durch $x \in U_\varepsilon$.

Beachte, dass sich für eine *beschränkte* Menge U eine L^p Approximationsaussage auch global herleiten lässt: Wähle $R > 0$ so, dass $U \subseteq B_R(0)$ ist, und setze $u \in L^p(U)$ durch 0 zu $E_0 u \in L^p(B_{R+1}(0))$ fort. Dann ist $U \subset \overline{B_R(0)} \subset B_{R+1}(0)$, also $U \Subset B_{R+1}(0)$, und Lemma 3.11 zeigt, dass $(E_0 u)^\varepsilon \rightarrow E_0 u = u$ in $L^p(U)$.

Satz 3.12: Meyers-Serrin Approximation

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_k) \subset W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ so dass $u_k \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Insbesondere ist damit $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zunächst für $|\alpha| \leq k$, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = (D^\alpha u)^\varepsilon \quad \text{in } \Omega_\varepsilon.$$

Die Ableitung der geglätteten Funktion u^ε entspricht also der Glättung der schwachen Ableitung von u . Sei nun $x \in \Omega_\varepsilon$. Mit der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration sowie der Definition der distributionellen Ableitungen berechnen wir

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= \partial_{x^\alpha} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int_\Omega \partial_{x^\alpha} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_{y^\alpha} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) \partial_{y^\alpha} u(y) dy = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x) = (D^\alpha u)^\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Hiebei haben wir ausgenutzt, dass $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y) \in C^\infty(\Omega)$ ist.

Schritt 2: Lokale Approximation durch glatte Funktionen. Diese Approximationseigenschaft folgt aus der Approximationseigenschaft für L^p -Funktionen, denn wir erhalten damit für jede Teilmenge $\Lambda \in \Omega$ nach Lemma 3.11:

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Lambda)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Lambda)}^p \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|(D^\alpha u)^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\Lambda)}^p \longrightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz $u^\varepsilon \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\Lambda)$ für eine beliebige Teilmenge $\Lambda \in \Omega$ gezeigt.

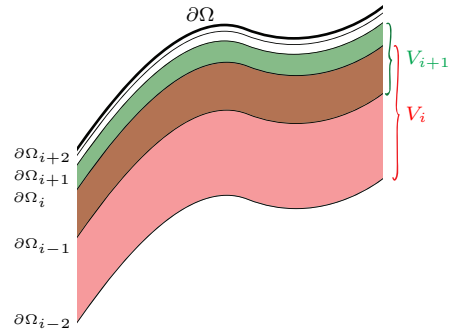
Schritt 3: Globale Approximation durch glatte Funktionen.

Diese Approximationseigenschaft folgt schließlich mit der lokalen Approximation auf einer geeigneten Überdeckung des Gebietes Ω . Wir konstruieren

$$\Omega_i := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i} \right\}$$

und $V_1 := \Omega_1$, $V_2 := \Omega_2$ sowie

$$V_\ell := \Omega_\ell \setminus \overline{\Omega_{\ell-2}} \quad \text{für } \ell \geq 3,$$



d.h. wir wählen für die Überdeckung Ringe, die immer schmaler werden, je näher wir am Rand $\partial\Omega$ sind.

Offensichtlich ist $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ eine offene Überdeckung von Ω . Diese ist zudem lokal endlich, denn jeder Punkt $x \in \Omega$ ist in maximal zwei Mengen V_i enthalten. Wir wählen eine zugehörige Zerlegung der Eins, d.h. eine Familie von Funktionen

$$\xi_i \in C_0^\infty(V_i), \quad 0 \leq \xi_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ist $\xi_i u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\xi_i u) \subset V_i$ eine *Lokalisierung* von u . Diese wollen wir nun durch geeignete Glättungen wie in Schritt 2 *lokal* approximieren. Das soll aber so passieren, dass wir sie *global* zu einer gesamt-Approximation zusammenbauen können.

Für $\delta > 0$ wählen wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\delta) > 0$, so dass

$$\|\xi_i u - (\xi_i u)^{\varepsilon_i}\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

und $\text{supp}(\xi_i u)^{\varepsilon_i} \subset V_i$ gilt. Das ist möglich nach Schritt 2. Wir approximieren $u \in W^{k,p}(\Omega)$ nun durch die Funktion

$$v_\delta(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i u)^{\varepsilon_i}(x), \quad x \in \Omega.$$

Es ist $v_\delta \in C^\infty(\Omega)$, denn v_δ ist lokal endliche Summe glatter Funktionen. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|u - v_\delta\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i u - \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i u)^{\varepsilon_i} \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i u - (\xi_i u)^{\varepsilon_i}\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq \delta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \delta. \end{aligned}$$

Mit der Wahl $u_k := v_{1/k}$ folgt nun die Behauptung. \square

Achtung: Satz 3.12 liefert eine Aussage über $C^\infty(\Omega)$ -Approximationen. Die analoge Aussage zu $C^\infty(\bar{\Omega})$ -Approximation ist im Allgemeinen **falsch**.

Das kann man sich z.B. in \mathbb{R}^2 mit der Menge $\Omega := B_1(0) \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ klarmachen, eine geschlitzte Einheitskreis. Dort wählt man eine geeignet glatte und integrierbare Funktion u , die, für $x > 1/2$, über dem Schlitz den Wert 1, und darunter den Wert 0 annimmt, und im linken Halbkreis diese beiden Werte hinreichend glatt verbindet, so dass eben noch beispielsweise $u \in H^1(\Omega)$ gilt. Dann kann es keine glatte Funktion in $C^\infty(\bar{\Omega})$ geben, die u geeignet approximiert.

Das Problem liegt hier darin, dass die geschlitzte Scheibe Ω lokal um den Schlitz auf *beiden Seiten* des Randes $\partial\Omega$ liegt. Das führt auch noch in diversen anderen Kontexten zu Problemen, die wir alsbald betrachten werden. Die Abhilfe hier sind weitere Annahmen an das Gebiet Ω bzw. dessen Rand $\partial\Omega$.

3.2.2 Randregularität

Wir geben zunächst die Definition der Randregularität und erklären danach, wie diese heuristisch einzusetzen ist. Sei dafür Ω ein beschränktes Gebiet.

Definition 3.13: C^k /Lipschitz Rand

Wir sagen, dass $\partial\Omega$ ein C^k -Rand [Lipschitz-Rand] ist, wenn zu jedem Punkt $x^0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und eine C^k -Funktion [Lipschitz-Funktion] $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren, so dass, gegebenenfalls nach Rotation und Umsortierung der Koordinatenachsen, gilt:

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \left\{ x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \right\}.$$

Wie üblich ist $\partial\Omega$ ein C^∞ -Rand, wenn es ein C^k -Rand für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist. Wir sagen weiter, dass $\partial\Omega$ ein *stückweise* X -Rand ist, wenn es ein X -Rand bis auf endlich viele Ausnahmepunkte ist.

Beachte, dass in Definition 3.13 folgt, dass $\partial\Omega \cap B_r(x^0)$ genau den $x \in B_r(x^0)$ entspricht, für die $x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$ ist. Ein C^k -Rand [Lipschitz-Rand] lässt sich also lokal in jedem Randpunkt als der Graph einer C^k -Funktion [Lipschitz-Funktion] schreiben, und Ω liegt auf genau einer Seite dieses Graphen.

Für einen C^k -Rand existiert die äußere Normale ν an Ω immer eindeutig (wie?) und ist selbst mindestens stetig als Abbildung $\partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für einen Lipschitz-Rand gilt diese Aussage noch immerhin fast überall, vgl. auch die Fußnote weiter unten. Der Satz von Gauß gilt grundsätzlich für C^1 -Gebiete, es existieren aber Verallgemeinerungen.

Die vorige Definition der Randregularität wird üblicherweise in folgender Art und Weise zum *Glattziehen des Randes* (**flatten the boundary**) benutzt. Sei $x^0 \in \partial\Omega$ und seien r und γ assoziiert wie in Definition 3.13. Definiere die Transformation $\Phi: B_r(x^0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi_i(x) := x_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \Phi_n(x) := x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dann folgt, dass $x \in \partial\Omega \cap B_r(x^0)$ genau dann, wenn $x \in B_r(x^0)$ und $\Phi(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Der Rand $\partial\Omega$ wird also durch Φ (lokal) zur Hyperebene $[x_n = 0]$ glattgezogen. Weiterhin finden wir um $\Phi(x^0)$ eine Kugel $B_R(\Phi(x^0))$, so dass

$$\begin{aligned}\Phi(B_r(x^0) \cap \overline{\Omega}) &\supseteq B_R(\Phi(x^0))^+ := \{x \in B_R(\Phi(x^0)) : x_n \geq 0\} \\ \Phi(B_r(x^0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)) &\supseteq B_R(\Phi(x^0))^- := \{x \in B_R(\Phi(x^0)) : x_n \leq 0\}.\end{aligned}$$

Man kommt auch wieder zurück, in dem man $\Psi: \text{Bild}(\Phi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgendermaßen setzt:

$$\Psi_i(y) := y_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \Psi_n(y) := y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Dann gilt $\Phi = \Psi^{-1}$ auf $B_r(x^0)$, sowie $\det \Phi' = \det \Psi' = 1$.⁴ Randregularität liefert also die Möglichkeit, sich bei der Betrachtung des Gebietes lokal um den Rand jeweils auf eine Situation mit einem flachen Rand zurückzuziehen.

Wir werden diese Technik im folgenden regelmäßig nutzen bzw. referenzieren. Sie ist auch in vielen Beweisen, die wir nicht alle explizit ausführen, die treibende Kraft hinter den Kulissen. Dabei nutzt man, dass Sobolevfunktionen kompatibel mit hinreichend regulären Transformationen sind.

3.2.3 Globale Approximation durch glatte Funktionen

Unter der Annahme von Randregularität kann man tatsächlich beweisen, dass auch glatte Funktionen auf $\overline{\Omega}$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ liegen. Es lohnt sich, sich klar zu machen, wieso die Annahme der Randregularität das Gegenbeispiel nach Satz 3.12 ausschließt.

Wir werden den folgenden Satz nicht beweisen; er wird später aus anderen Resultaten automatisch folgen (siehe Satz 3.18 und Satz 3.19). Ein Beweis "von Hand" für C^1 -Rand findet sich in (Evans, 1998, Kapitel 5.3.3).

Satz 3.14

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_k) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, so dass $u_k \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Insbesondere ist damit $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Wir halten noch fest, dass, falls im Kontext von Satz 3.14 tatsächlich $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt, die Folge (u_k) so gewählt werden kann, dass $u_k \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Insbesondere ist die Konvergenz $u_m(x) \rightarrow u(x)$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$.

⁴Für reelle Lipschitzfunktionen γ existieren die Ableitungen wenigstens fast überall; das ist der *Satz von Rademacher* und genügt für Transformationen von Sobolev-Funktionen.

3.2.4 Randwerte und Spuroperator

Die Sobolevfunktionen sind als Teilraum entsprechender $L^p(\Omega)$ -Räume definiert. Dadurch bestehen sie, formell gesehen, aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die fast überall gleich sind. Das heißt auch, dass es ohne Weiteres nicht wohldefiniert ist, von der Einschränkung $u|_N$ einer Sobolev-Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$ auf eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ zu sprechen. Das betrifft insbesondere auch die Frage, ob man einer Sobolevfunktion einen geeigneten Wert auf der Nullmenge $\partial\Omega$ zuweisen kann.

Diese Problematik wird im späteren Verlauf der Vorlesung noch eine Rolle spielen, wenn wir das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wieder aufgreifen und in einem schwachen Sinne mit Lösungen in einem Sobolevraum interpretieren wollen. Natürlich sollte die Interpretation der Randwerte einer Sobolevfunktion kompatibel mit der Einschränkung $u|_{\partial\Omega}$ im Falle $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sein.

Am Beispiel der geschlitzten Scheibe nach Satz 3.12 ist leicht ersichtlich, dass auch für diese Thematik Randregularität gefordert werden muss, da sonst schon nicht klar ist, wie $u|_{\partial\Omega}$ im Falle $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zu interpretieren ist, wenn Ω (lokal) auf beiden Seiten des Randes $\partial\Omega$ liegt.

Tatsächlich kann man aber, unter der Annahme von Randregularität, eine entsprechende Verallgemeinerung der Einschränkung (auf den Rand) definieren; diese Verallgemeinerung nennt man *Spuroperator*. Wir geben der Einfachheit halber die Version für $k = 1$ an, da wir nur diese benötigen werden:

Satz 3.15: Spursatz I

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und sei $\partial\Omega$ ein C^1 -Rand. Dann existiert für $1 \leq p < \infty$ ein eindeutig definierter stetiger linearer *Spuroperator* $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega; \sigma)$, so dass $\text{tr } u = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gilt. Für $1 < p < \infty$ existiert weiterhin eine Konstante $C(p)$, so dass

$$\|\text{tr } u\|_{L^p(\partial\Omega; \sigma)} \leq C(p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}} \quad (u \in W^{1,p}(\Omega)). \quad (3.8)$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die multiplikative Ungleichung (3.8) für $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Sei dazu $x \in \partial\Omega$ zunächst fix. Wir nehmen an, dass $\partial\Omega$ lokal um x auf einer Kugel $B_r(x)$ flach ist und mit der Hyperebene $[x_n = 0]$ übereinstimmt, vgl. Abschnitt 3.2.2. Insbesondere existiert ein $0 < R \leq r$, so dass $B_R(x)^+ \subseteq \bar{\Omega}$ und $B_R(x)^- \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Auf $B_R(x) \cap \partial\Omega$ entspricht die äußere Normale an Ω genau $\nu = (0, \dots, 0, -1)$. Sei weiterhin $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x))$ eine Abschneidefunktion $0 \leq \varphi \leq 1$ mit $\varphi \equiv 1$ auf $B_{R/2}(x)$, und setze $\Gamma := \partial\Omega \cap B_{R/2}(x)$.

Damit erhalten wir, wobei wir zuerst den Satz von Gauß einsetzen:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u(y)|^p d\sigma(y) &\leq - \int_{\partial\Omega \cap B_R(x)} \varphi(y) |u(y)|^p \nu_n(y) d\sigma(y) \\ &= - \int_{B_R(x)^+} \partial_n [\varphi(y) |u(y)|^p] dy. \end{aligned}$$

Für $p > 1$ schreiben wir nun $\varphi(y)|u(y)|^p = [\varphi(y)u(y)] \operatorname{sgn}(u(y)) |u(y)|^{p-1}$ und weiter:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u(y)|^p d\sigma(y) &\leq - \int_{B_R(x)^+} \left[\partial_n (\varphi(y)u(y)) |u(y)|^{p-1} + (p-1)\varphi(y)u(y) |u(y)|^{p-2} \partial_n u(y) \right] dy \\ &\leq \|\nabla(\varphi u)\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + (p-1) \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mittels Produktregel folgt

$$\|\nabla(\varphi u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{C^1(\bar{\Omega})} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

also insgesamt, wegen $\|\varphi\|_{C^1(\bar{\Omega})} \geq 1$,

$$\int_{\Gamma} |u(y)|^p d\sigma(y) \leq p \|\varphi\|_{C^1(\bar{\Omega})} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Dies ist genau eine (auf der linken Seite) lokale Version von (3.8), da ja $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{R/2}(x)$ war. Wir übertragen dies nun mittels eines Kompaktheitsarguments auf ganz $\partial\Omega$. Das vorige Prozedere lässt sich nun für jeden Randpunkt $x \in \partial\Omega$ durchführen. Klarerweise ist

$$\bigcup_{x \in \partial\Omega} (\partial\Omega \cap B_{R/2}(x)) = \partial\Omega,$$

und jedes $\partial\Omega \cap B_{R/2}(x)$ ist relativ offen in $\partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existiert also eine *endliche* Anzahl Punkte $(x_1, \dots, x_N) \subset \partial\Omega$ so dass, mit $\Gamma_i = \partial\Omega \cap B_{R/2}(x_i)$,

$$\bigcup_{i=1}^N \Gamma_i = \partial\Omega.$$

Entsprechend existiert eine dieser endlichen Überdeckung zugeordnete Zerlegung der Eins (ξ_1, \dots, ξ_N) mit $\xi_i \in C_0^\infty(\Gamma_i)$. Mit dieser erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |u(y)|^p d\sigma(y) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \xi(y) |u(y)|^p d\sigma(y) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} |u(y)|^p d\sigma(y) \leq C(p) \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

und das ist (3.8) für $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert nach Satz 3.14 eine approximierende Folge $(u_n) \subseteq C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Insbesondere ist nach (3.8) die Folge der Einschränkungen $u_n|_{\partial\Omega}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega; \sigma)$ und damit konvergent. Dieser Grenzwert ist genau $\operatorname{tr} u$.

Im Fall $p = 1$ zerlegen wir $\varphi(y)|u(y)|^p$ nicht wie oben, sondern rechnen direkt

$$\partial_n \left[\varphi(y)|u(y)| \right] = \partial_\nu \varphi(y)|u(y)| + \varphi(y) \operatorname{sgn}(u(y)) \partial_\nu u(y)$$

im Sinne schwacher Ableitungen. Damit erhält man

$$\int_{\Gamma} |u(y)|^p d\sigma(y) \leq \|\nabla \varphi\|_{\infty} \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\varphi\|_{\infty} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$$

für $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Die Übertragung auf eine globale Abschätzung und dann auf ganz $W^{1,1}(\Omega)$ funktioniert wie zuvor.

Es verbleibt noch, $\operatorname{tr} u = u|_{\partial\Omega}$ für $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ zu zeigen. Bislang haben wir diese Eigenschaft nur für $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dafür ziehen wir die Bemerkung nach Satz 3.14 heran. Von dieser wissen wir, dass eine Folge glatter $W^{1,p}(\Omega)$ -Approximationen $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ an $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tatsächlich auch *gleichmässig* gegen u konvergiert. Insbesondere also

$$u|_{\partial\Omega} \xleftarrow{\text{gleichmässig}} u_n|_{\partial\Omega} \xrightarrow{\text{in } L^p(\partial\Omega; \sigma)} \operatorname{tr} u,$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Aus dem obigen Spursatz folgt, exemplarisch für den Hilbertraumfall $p = 2$, dass die Spur einer Funktion in $H^1(\Omega)$ immer einer Funktion in $L^2(\partial\Omega; \sigma)$ entspricht. Die Abbildung $\operatorname{tr}: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega; \sigma)$ ist aber *nicht* surjektiv, es gibt also Funktionen in $L^2(\partial\Omega; \sigma)$, die nicht Spur einer $H^1(\Omega)$ Funktion sind. Wir drehen den Spieß aber einfach herum und definieren

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \left\{ v \in L^2(\partial\Omega; \sigma) : v = \operatorname{tr} u \text{ für ein } u \in H^1(\Omega) \right\}$$

und versehen diesen Vektorraum mit der Norm

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf \left\{ \|u\|_{H^1(\Omega)} : u \in H^1(\Omega), \operatorname{tr} u = v \right\}. \quad (3.9)$$

Damit ist $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ein Banachraum und $\operatorname{tr}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ ist per Definition surjektiv.

Diese Definition ist natürlich wenig praktikabel. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass $H^{1/2}(\partial\Omega)$ auch konkreter und wesentlich praktikabler angegeben werden kann, nämlich als diejenigen $u \in L^2(\partial\Omega; \sigma)$, für die

$$[u]_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^n} d\sigma(x, y) < \infty,$$

wobei

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega : |x - y| < 1 \right\}.$$

Weiterhin definiert $u \mapsto \|u\|_{L^2(\partial\Omega; \sigma)} + [u]_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ eine äquivalente Norm auf $H^{1/2}(\Omega)$. Dies geht aber über diese Vorlesung hinaus. Wir erwähnen nur kurz, dass die Nomenklatur $H^{1/2}$ schon suggeriert, dass der jeweilige Raum "zwischen" L^2 und H^1 liegen sollte. Mittels Interpolationstheorie lässt sich dieser Anschauung ein konkreter Sinn geben, zunächst für allgemeine offene Mengen U , und dann für $\partial\Omega$ mittels Glättziehen des Randes. Wir verweisen auf Lions & Magenes (1972) und halten nur den folgenden allgemeinen Satz ohne Beweis fest:

Satz 3.16: Spursatz II

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\partial\Omega$ ein stückweise Lipschitz-Rand. Dann existiert ein stetiger linearer Operator, der *Spuroperator* $\text{tr}: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, so dass

$$\text{tr } u = u|_{\partial\Omega} \quad (u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))$$

gilt. Insbesondere ist der Spuroperator surjektiv, d.h. für jedes $v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ existiert ein $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = v$.

Bemerkung 3.17

Eine Erweiterung des Spuroperators ist auch auf Sobolevräume $H^k(\Omega)$ möglich, es ist dann $\text{tr}: H^k(\Omega) \rightarrow H^{k-1/2}(\partial\Omega)$ ein stetiger surjektiver Operator. Grob gesagt verliert man also beim Auswerten der Spur immer eine halbe Differentiationsordnung. Zur einfacheren Notation werden wir im Folgenden häufig u für die Randwerte schreiben, damit aber eigentlich die Spur $\text{tr } u$ assoziieren.

3.2.5 Fortsetzungen

Einige strukturelle Eigenschaften der Sobolevräume lassen sich für den speziellen Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ (relativ) einfach zeigen. Es ist also von Interesse, Sobolevfunktionen von einer beschränkten Menge Ω auf den ganzen Raum \mathbb{R}^n fortzusetzen, um diese strukturellen Eigenschaften auszunutzen. Dies betrifft zum Beispiel die globale Approximation durch glatte Funktionen, wie wir gleich sehen werden.

Für L^p -Funktionen, $1 \leq p \leq \infty$, ist eine Fortsetzung auf eine größere Menge, insbesondere den ganzen Raum, trivial, denn man kann einfach durch 0 fortsetzen und erhält sogar

$$\|E_0 u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für Sobolev-Funktionen ist die Fortsetzung dagegen nicht trivial. Die Fortsetzung mit Null funktioniert in diesem Fall nicht, denn hierdurch entstehen Unstetigkeiten entlang des Randes $\partial\Omega$. Eine so fortgesetzte Funktion besitzt im Allgemeinen wegen der Unstetigkeiten keine schwachen Ableitungen erster Ordnung, vgl. Beispiel 3.5. Man muss stattdessen einen Weg finden, eine Sobolevfunktion so fortzusetzen, dass die schwachen Ableitungen entlang $\partial\Omega$ erhalten (und kontrollierbar) bleiben.

Um zunächst einen einheitlich abstrakten Rahmen zu haben, führen wir folgenden Begriff ein: Ein linearer stetiger Operator $E: W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Fortsetzungsoperator*, falls $(Eu)|_{\Omega} = u$ für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt. Wir sagen, dass Ω ein (k, p) -*Fortsetzungsgebiet* ist, falls ein solcher Fortsetzungsoperator existiert. Insbesondere folgt für ein Fortsetzungsgebiet Ω , dass

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u|_{\Omega} : u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \right\} \quad (3.10)$$

und man kann $W^{k,p}(\Omega)$ auch äquivalent mit einer Quotientennorm in der Art wie in (3.9) versehen.

Eine beispielhafte Anwendung ist die folgende, vgl. Satz 3.14. Weitere folgen im Abschnitt 3.2.7.

Satz 3.18

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes (k, p) -Fortsetzungsgebiet mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Beweis. Mittels Faltung mit Mollifiern macht man sich leicht klar, dass $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$ ist. (Siehe Lemma 2.13 und den Beweis von Satz 3.12.)

Sei nun $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Nach Annahme gilt (3.10) und es existiert ein $U \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, so dass $U|_\Omega = u$. Dazu wiederum existiert eine Folge $(U_k) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $U_k \rightarrow U$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Mit $u_k := U_k|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ folgt $u_k \rightarrow u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, da

$$\|u - u_k\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|(U - U_k)|_\Omega\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|U - U_k\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0. \quad \square$$

Aus der sehr bequemen Argumentation im vorigen Satz sollte wegen einem Arbeitserhaltungsargument klar sein, dass die Herleitung eines Fortsetzungsoperators nichttrivial sein muss.

Satz 3.19: Fortsetzungssatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator $E: W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\text{supp}(Eu) \subseteq \Omega_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \Omega) < \delta \right\}$$

Insbesondere ist jedes beschränkte Gebiet mit Lipschitz-Rand ein (k, p) -Fortsetzungsgebiet für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$.

Beweis. Wir skizzieren hier nur kurz die wesentlichen Ideen für eine Fortsetzung.

Zunächst nutzen wir die angenommene Randregularität und nehmen mittels Glättziehen des Randes an, dass zu $y \in \partial\Omega$ fix der Rand $\partial\Omega$ lokal um y flach ist und mit $[x_n = 0]$ übereinstimmt. Weiterhin existiert $R > 0$, so dass, mit $B := B_R(y)$, gilt: $B^+ \subseteq \bar{\Omega}$ und $B^- \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, siehe Abschnitt 3.2.2.

Nehmen wir zunächst $k = 1$ an, d.h. wir betrachten die Räume $W^{1,p}(\Omega)$. Dann können wir tatsächlich einfach mittels Spiegelung (**reflection**) operieren und setzen, für $u \in W^{1,p}(B^+)$,

$$(Eu)(x) = (Eu)(x', x_n) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B^+, \\ u(x', -x_n) & \text{für } x \in B^-, \end{cases} \quad (x \in B).$$

Man kann nun nachrechnen, dass tatsächlich $Eu \in W^{1,p}(B)$ und $\|Eu\|_{W^{1,p}(B)} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$ gilt.

Alternativ hätten wir auch zunächst $u \in C^1(\bar{B}^+)$ annehmen können, dann diese Funktion erweitern, und schließlich per Dichtheit schließen können.⁵ Der Vorteil dieses Vorgehens wäre,

⁵Für dieses Vorgehen müssten wir aber Satz 3.14 ohne Bezug auf Satz 3.18 und den gerade zu beweisenden zur Hand haben.

dass man direkt mit klassischen Ableitungen rechnen kann. Allerdings wäre die Erweiterung per Spiegelung dann nicht mehr in $C^1(\overline{B})$, wie man sich leicht mit z.B. einer linearen Funktion auf B^+ klar macht. Daher müsste man in diesem Fall zu einer Spiegelung höherer Ordnung greifen:

$$(Eu)(x) = (Eu)(x', x_n) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in B^+, \\ -3u(x', -x_n) + 4u(x', -x_n/2) & \text{für } x \in B^-, \end{cases} \quad (x \in B).$$

Hier ist $Eu \in C^1(\overline{B})$, wenn $u \in C^1(\overline{B^+})$ war, und $\|Eu\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$ für eine von u unabhängige Konstante C .

Der letztere Ansatz verallgemeinert auch für den Fall $k \geq 2$, im Gegensatz zur einfachen Spiegelung: Da diese, wie schon festgestellt, Knicke in die erweiterte Funktion induzieren kann, wird der Raum $W^{2,p}$ im Allgemeinen nicht erhalten. Daher muss für $k \geq 2$ für diesen Ansatz grundsätzlich zu einer Spiegelung höherer Ordnung gegriffen werden. Allerdings wird man hier für $k \geq 2$ auch entsprechend höhere Randregularität annehmen müssen, damit die "black box" Rückführung auf glattgezogenen Rand auch funktioniert. (Faustregel: C^k -Rand für $W^{k,p}$ -Fortsetzung mittels Spiegelung.)

Man kann allerdings auch tatsächlich mit (erheblich) komplizierteren Techniken Erweiterungen erzeugen. Damit erkaufte man sich, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ auch nur ein Lipschitz-Rand genügt. Wir verweisen auf das Buch von Elias M. Stein (1970). \square

3.2.6 Die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ und Dualräume

Wir führen noch einen speziellen Unterraum der Sobolev-Räume erster Ordnung ein, der von zentraler Bedeutung ist.

Definition 3.20: Die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$

Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \text{es exist. } (u_n) \subseteq C_0^\infty(\Omega) : u_n \rightarrow u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Speziell für $p = 2$ setzen wir $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Die Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ sind per Definition abgeschlossene Teilräume der Banachräume $W^{1,p}(\Omega)$ und damit selbst Banachräume. Analog ist $H_0^1(\Omega)$ weiterhin ein Hilbertraum. Auf \mathbb{R}^d erhalten wir keine neuen Räume:

Lemma 3.21: $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Für $1 \leq p < \infty$ gilt $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere ist $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

(Für den Beweis verweisen wir auf (Demengel & Demengel, 2012, Prop. 2.29).) Auf beschränkten Gebieten Ω ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ allerdings durchaus interessant, denn falls ein stetiger Spuroperator auf $\partial\Omega$ existiert, erhalten wir folgende intuitive Charakterisierung von $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Lemma 3.22: Charakterisierung $W_0^{1,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und sei $\partial\Omega$ ein C^1 -Rand. Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \operatorname{tr} u = 0 \text{ } \sigma\text{-a.e. auf } \partial\Omega \right\}.$$

Beweis. Die Inklusion “ \subseteq ” ist einfach: Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $(u_n) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ eine approximierende Folge $u_n \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$; diese existiert per Definition. Dann ist nach Satz 3.15

$$0 = u_n|_{\partial\Omega} = \operatorname{tr} u_n \xrightarrow{\operatorname{tr} \text{ stetig}} \operatorname{tr} u,$$

also $\operatorname{tr} u = 0$ in $L^p(\partial\Omega; \sigma)$. Die umgekehrte Inklusion für $p \neq 2$ ist aufwändig zu beweisen. Wir verweisen auf (Evans, 1998, Thm. 5.5.2). \square

Man kann auch $W_0^{k,p}(\Omega)$ betrachten, mit der analogen Definition. Dort sind dann noch die $(k-1)$ -ten iterierten Normalenableitungen null. (Dafür braucht man einen ausgefilterten Spursatz.)

Die vorige Charakterisierung legt nahe, dass sich die $W_0^{k,p}(\Omega)$ Teilräume sehr einfach durch 0 auf den ganzen Raum fortsetzen lassen, und dem ist auch tatsächlich so. Der Beweis folgt sofort mittels Nullerweiterung von $C_0^\infty(\Omega)$ nach $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und Dichtheit.

Lemma 3.23: Nullfortsetzung $W_0^{k,p}(\Omega)$

Für $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Nullfortsetzung E_0 ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator $W_0^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Das bedeutet im Wesentlichen, dass $W_0^{k,p}(\Omega)$ alle guten Eigenschaften von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ unmittelbar erbt, *völlig unabhängig* von der Qualität von $\partial\Omega$!

Für unsere folgenden Betrachtungen wird eine genauere Spezifizierung des Dualraumes von $H_0^1(\Omega)$ nützlich sein. Dieser wird üblicherweise mit $H^{-1}(\Omega)$ bezeichnet:

Definition 3.24: Der Dualraum $H^{-1}(\Omega)$

Mit $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$ bezeichnen wir den Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ mit der Operatornorm

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup \left\{ \langle f, u \rangle : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \quad (f \in H^{-1}(\Omega)).$$

Einen Teilraum von $H^{-1}(\Omega)$ können wir direkt angeben, nämlich $L^2(\Omega)$. Da $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, lässt sich die von einem $v \in L^2(\Omega)$ erzeugte reguläre Distribution eindeutig zu einem Element aus $H^{-1}(\Omega)$ fortsetzen:

$$|\langle v, u \rangle| = \left| \int_{\Omega} v(x) u(x) \, dx \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

In diesem Sinne gilt also $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Diese Konstellation nennt man auch *Gelfand-Dreier* (**Gelfand triple**). Um die Nomenklatur $H^{-1}(\Omega)$ zu rechtfertigen, beobachten

wir, dass auch die distributionelle Ableitung $\partial_i v$ einer Funktion $v \in L^2(\Omega)$ ein stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega)$ induziert:

$$|\langle \partial_i v, u \rangle| = \left| \int_{\Omega} v(x) \partial_i u(x) \, dx \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

(Dieser Zusammenhang zwischen Distributionen bzw. Testfunktionen und $H_0^1(\Omega)$ macht diesen Hilbertraum so speziell.) Der Raum $H^{-1}(\Omega)$ enthält also sozusagen Ableitungen von $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ Funktionen, wodurch die negative Differenzierbarkeitsordnung in $H^{-1}(\Omega)$ motiviert ist.

Für unsere späteren Betrachtungen ist es nützlich eine explizite Charakterisierung des Dualraums $H^{-1}(\Omega)$ zu haben. Bei dieser sieht man, dass $H^{-1}(\Omega)$ auch tatsächlich wesentlich genau aus distributionellen Ableitungen erster Ordnung besteht.

Satz 3.25: Charakterisierung von $H^{-1}(\Omega)$

(i) Zu $f \in H^{-1}(\Omega)$ existieren Funktionen $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} \left[f_0(x)v(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x) \partial_i v(x) \right] dx \quad (v \in H_0^1(\Omega)). \quad (3.11)$$

(ii) Es gilt

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^n \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \right\}.$$

Dabei wird das Infimum über alle $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ gebildet, für die (3.11) gilt.

Beweis. (i) Auf dem Hilbertraum $H^1(\Omega)$ war das Skalarprodukt durch

$$(u, v) := \int_{\Omega} \left[u(x)v(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j u(x) \partial_j v(x) \right] dx \quad (u, v \in H^1(\Omega))$$

definiert, welches auf $H_0^1(\Omega)$ als Teilraum vererbt wird. Sei nun $f \in H^{-1}(\Omega)$ beliebig. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz (FA11) existiert ein eindeutiges $w \in H_0^1(\Omega)$, so dass $(w, v)_1 = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt, also

$$\int_{\Omega} \left[w(x)v(x) + \sum_{j=1}^n \partial_j w(x) \partial_j v(x) \right] dx = (w, v)_1 = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.12)$$

Mit den Definitionen $f_0 := w$ und $f_i := \partial_i w$ für $i = 1, \dots, n$ folgt die Behauptung.

(ii) Seien die Notationen wie im ersten Teil des Beweises. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gilt weiter

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|w\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^n \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

und es verbleibt zu zeigen, dass alle anderen Realisierungen von (3.11) größere Norm haben müssen. Seien also $g_0, g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega)$ gegeben, so dass

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} \left[g_0(x)v(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x)\partial_i v(x) \right] dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Mit dem Ansatz $(w, w)_1 = \langle f, w \rangle$ in (3.12) und mehrmaliger Nutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \langle f, w \rangle = \int_{\Omega} \left[g_0(x)w(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x)\partial_i w(x) \right] dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[|g_0(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |g_i(x)|^2 \right]^{1/2} \cdot \left[|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i w(x)|^2 \right]^{1/2} dx \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^n \int_{\Omega} |g_i(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i w(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \int_{\Omega} |g_i(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Eine analoge Charakterisierung lässt sich auch für den Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ herleiten, im Beweis hat man aber nicht mehr den sehr bequemen Rieszschen Darstellungssatz zur Verfügung.

Für (3.11) schreibt man auch oft (im distributionellen Sinn)

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f_i \quad \text{bzw.} \quad f = f_0 - \nabla \cdot F \quad \text{mit} \quad F = (f_1, \dots, f_n).$$

Normalenableitung von $H^1(\Omega)$ -Funktionen

Ein weiterer Dualraum ist bei der Betrachtung der Normalenableitung $\partial_\nu u$ einer $H^1(\Omega)$ -Funktion u interessant, nämlich $H^{-1/2}(\partial\Omega) := H^{1/2}(\partial\Omega)^*$. Dazu nehmen wir an, dass $\partial\Omega$ ein C^1 -Rand ist. Mit dem Satz von Gauß gilt, zunächst für glatte Funktionen $u, v \in C^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} \left[\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \Delta u(x)v(x) \right] dx.$$

Mit dem Spursatz (Satz 3.15) und einem Dichtheitsargument (Satz 3.14) lässt sich vorige Identität direkt auf $v \in H^1(\Omega)$ übertragen. Wir würden diese nun gerne als Definition für $\partial_\nu u$ für $u \in H^1(\Omega)$ benutzen, allerdings steht rechts noch das Objekt Δu , das für $u \in H^1(\Omega)$ zunächst nicht sinnvoll wohldefiniert ist. Wir fordern daher der Einfachheit halber $\Delta u \in L^2(\Omega)$, d.h. der distributionelle Laplace von u soll eine von einer $L^2(\Omega)$ -Funktion erzeugte reguläre Distribution sein. (Man kann zeigen, dass das keine Einschränkung ist, wenn man eine Normalenableitung definieren will, siehe (Demengel & Demengel, 2012, Abschnitt 3.4.4).)

Für $u \in H^1(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^2(\Omega)$ definieren wir also:

$$\langle \partial_\nu u, \text{tr } v \rangle := \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \Delta u(x)v(x)] dx \quad (v \in H^1(\Omega)).$$

Mit dem schärferen Spursatz (Satz 3.16) folgt damit insbesondere

$$\partial_\nu u \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad \text{wenn } u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega).$$

Dieses Resultat ist kompatibel mit der Vorstellung, dass $\partial_\nu u$ für $u \in H^1(\Omega)$ eine Ableitung der Spur $\text{tr } u \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ist und daher in $H^{1/2-1}(\partial\Omega) = H^{-1/2}(\partial\Omega)$ liegen sollte.

3.2.7 Sobolev-Ungleichungen und Einbettungssätze

In diesem Abschnitt studieren wir Einbettungen von Sobolev-Räumen in andere Skalen von Räumen, wie Räume stetiger Funktionen oder Lebesgue-Räume. Diese Resultate sind zentral für die praktische Arbeit mit Sobolev-Räumen und schwachen Lösungskonzepten, ganz besonders für nichtlineare Probleme, und extrem weitreichend.

Wir untersuchen die folgende Frage:

Falls $u \in W^{k,p}(\Omega)$, gehört u dann automatisch auch zu anderen Funktionenräumen?

Die Antwort ist abhängig den Parametern k und p sowie der Dimension n des Gebietes Ω . Wir unterscheiden folgende Fälle:

- $kp > n$ (*superkritischer* Fall, Einbettung in stetige bzw. Hölder-Funktionen)
- $kp = n$ (*kritischer* Fall)
- $kp < n$ (*subkritischer* Fall, Einbettung in Lebesgue-Räume)

Der kritische Fall $kp = n$ ist relativ involviert und wird daher nicht genauer behandelt werden. (Ärgerlicherweise fällt $H^1(\Omega)$ für $n = 2$ in diese Kategorie.) Wir beginnen mit dem subkritischen Regime $kp < n$. Grundsätzlich werden wir zunächst $k = 1$ annehmen. Die Aussagen für $k \geq 2$ folgen dann iterativ. Die Strategie ist es, fundamentale Sobolev-Ungleichungen für $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ herzuleiten und diese dann mittels Fortsetzungsoperatoren auf Gebiete Ω zu übertragen.

Subkritischer Fall $1 \leq p < n$

Wir zeigen zunächst die folgende fundamentale Ungleichung von großer Tragweite:

Satz 3.26: Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung/Sobolev-Einbettung

Sei $1 \leq p < n$. Dann existiert eine Konstante C , die nur von p und n abhängt, so dass

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)) \quad (3.13)$$

gilt, wobei $p^* := \frac{np}{n-p}$. Insbesondere gilt $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ für alle $p \leq q \leq p^*$.

Es ist klar, dass in (3.13) konstante Funktionen ausgeschlossen werden müssen, daher beziehen wir uns auf Funktionen mit kompaktem Träger. Bemerkenswerterweise hängt die Konstante C aber *nicht* von der Größe des Trägers der Funktion u ab.

Bevor wir die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung beweisen, motivieren wir zunächst die auf den ersten Blick zufällige Wahl von p^* . Angenommen, wir wollen eine Ungleichung der Form

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$$

für ein $1 \leq q \leq \infty$ zeigen. Dann kann man sich mit einem Skalierungsargument klar machen, dass der Wert für q nicht beliebig sein kann: Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ betrachten wir die λ -Skalierung $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$. Mittels der Transformationsformel gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla u_\lambda)(x)|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p dx = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p dy.$$

Wenn die obige Ungleichung gilt, folgt

$$\lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \lambda^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

also

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{1-n/p+n/q} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

und das gilt für *jedes* $\lambda > 0$. Also muss $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ sein, da man sonst mit $\lambda \searrow 0$ oder $\lambda \rightarrow \infty$ einen Widerspruch produzieren könnte. (Wie?) Es folgt $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ bzw. $q = \frac{np}{n-p}$. Wir setzen also

$$p^* := \frac{np}{n-p}, \quad \text{der Sobolev-Exponent zu } 1 \leq p < n.$$

Es gilt immer $p^* > p$ und $p^* \searrow p$ für $n \rightarrow \infty$, zudem $p^* \rightarrow \infty$ für $p \nearrow n$.

Es folgt der bemerkenswert elementare Beweis von Satz 3.26.

Beweis von Satz 3.26. Wir betrachten zunächst den Fall $p = 1$ mit $p^* = \frac{n}{n-1}$. Dann ist für jedes $i = 1, \dots, n$:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi_i$$

und folglich

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| d\xi_i.$$

Damit erhalten wir

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left[\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| d\xi_i \right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integration über x_1 ergibt nun

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\xi_i \right]^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\xi_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\xi_i \right]^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\xi_1 \right]^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 d\xi_i \right]^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Fubini und vorher die *verallgemeinerte Hölder-Ungleichung*

$$\int \prod_{j=1}^k |v_j(x)| dx \leq \prod_{j=1}^k \left(\int |v_j(x)|^{p_j} dx \right)^{1/p_j} \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} = 1$$

benutzt haben, mit $k = p_j = n - 1$. Diese Technik führen wir iterativ mit Integration über x_2 , verallgemeinerte Hölder-Ungleichung, Integration über x_3, \dots weiter. Das führt dann zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &\leq \prod_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n)| dx_1 \cdots d\xi_i \cdots dx_n \right]^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)| dx \right]^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

und das ist die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung (3.13) für $p = 1$.

Sei nun $p > 1$. Wir betrachten für $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ und $\gamma > 1$ die Hilfsfunktion $v \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$v(x) := |u(x)|^\gamma \quad \text{mit} \quad \nabla v(x) = \gamma \operatorname{sgn}(u(x)) |u(x)|^{\gamma-1} \nabla u.$$

Auf diese wenden wir den gerade bewiesenen Fall $p = 1$ an:

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n\gamma}{n-1}} dx \right]^{\frac{n-1}{n}} &= \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^1(\Omega)} = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\gamma-1} |\nabla u(x)| dx \\ &\leq \gamma \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{p(\gamma-1)}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Nun wählen wir γ so, dass die Exponenten links und rechts zusammen passen:

$$\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{p(\gamma-1)}{p-1} \quad \iff \quad \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}.$$

(Beachte, dass tatsächlich $\gamma > 1$ für $1 < p < n$.) Mit dieser Wahl von γ gilt

$$\frac{n\gamma}{n-1} = \frac{np}{n-p}$$

und wir erhalten

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx \right]^{\frac{n-p}{np}} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Das ist die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung (3.13).

Die Einbettung $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ folgt nun direkt aus der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung (3.13) und Lemma 3.21. Zusammen mit der trivialen Einbettung $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \quad p \leq q \leq p^*$$

mittels Hölder-Ungleichung. □

Bemerkung

Die optimale Konstante für den Fall $p = 1$ ist $C_* := n^{-1} \omega_n^{-1/n}$, wie man mit einem etwas schärferen Argument erreichen kann. Hier besteht eine fundamentale Verbindung zur *isoperimetrischen Ungleichung*.

Wir erhalten die Sobolev-Einbettungen für Fortsetzungsgebiete:

Satz 3.27: Sobolev-Einbettung (subkritisch)

Sei $1 \leq p < n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes $(1, p)$ -Fortsetzungsgebiet. Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*).$$

Beweis. Da Ω beschränkt angenommen ist, genügt es, die Einbettung für $q = p^*$ zu zeigen. Sei $E \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$ ein Fortsetzungsoperator und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt nach der Einbettung $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ aus Satz 3.26:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|E\|_{W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Das gilt für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$, also folgt $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. □

Es folgt ebenfalls die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, vgl. Satz 2.23:

Satz 3.28: Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann existiert für jedes $1 \leq p < n$ eine Konstante C , die nur von p, q, n und $|\Omega|$ abhängt, so dass

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq q \leq p^*)$$

gilt. Insbesondere folgt

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*)$$

und $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ ist eine äquivalente Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.27; diesmal argumentiert man direkt für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und erweitert ∇u durch 0 auf \mathbb{R}^n , siehe Lemma 3.23. \square

Beachte: Da $p^* \rightarrow \infty$ wenn $p \nearrow n$, folgt aus Satz 3.28 für *beschränktes* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ insbesondere:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \quad (u \in W_0^{1,q}(\Omega))$$

für jedes $1 \leq q < \infty$ mit einer von q, n und $|\Omega|$ abhängigen Konstante C . (Wie?)

Korollar 3.29: Sobolev-Einbettung (subkritisch allgemein)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < n$ mit $kp < n$, sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (1 \leq q \leq p^*(k)), \quad p^*(k) := \frac{np}{n - kp}.$$

Die analoge Aussage gilt auch ohne Lipschitz-Rand für $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt wieder, die Einbettung für $q = p^*(k)$ zu zeigen. Durch die Annahme des Lipschitz-Randes haben wir Fortsetzungsoperatoren für $W^{\ell,q}(\Omega)$ für jedes Paar (ℓ, q) mit $\ell \in \mathbb{N}$ und $1 \leq q \leq \infty$ zur Verfügung. (Satz 3.19!) Die Behauptung folgt dann durch induktives Anwenden von Satz 3.27 auf die einzelnen Ableitungen:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1, \frac{np}{n-p}}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2, \frac{np}{n-2p}}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W^{1, \frac{np}{n-(k-1)p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega).$$

Für $W_0^{k,p}(\Omega)$ brauchen wir keine Annahme für einen Fortsetzungsoperator, da nach Lemma 3.23 die Nullfortsetzung E_0 verfügbar ist. Damit argumentieren wir analog. \square

Den allgemeinen Sobolev-Exponenten $p^*(k) := \frac{np}{n-kp}$ merkt man sich am besten durch

$$kp < n \quad \text{und} \quad \frac{1}{p^*(k)} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Kritischer Fall $p = n$

Dieser Fall ist relativ kompliziert, wenn man wirklich scharfe Ergebnisse erreichen möchte. Da $p^* \rightarrow \infty$ für $p \nearrow n$ gilt, könnte man erwarten bzw. hoffen, dass jede $W^{1,n}(\Omega)$ -Funktion auch beschränkt sein wird, und $W^{1,n}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ einbettet. Das ist aber (leider) **falsch** für $n > 1$. Das klassische Gegenbeispiel ist

$$u(x) := \log \log(1 + |x|^{-1}) \quad \text{auf } \Omega := B_1(0).$$

Es ist $u \in W^{1,n}(\Omega)$, aber $u \notin L^\infty(\Omega)$. (Achtung, nicht so leicht nachzurechnen!)

Wir beschränken uns daher auf ein nicht optimales Resultat und halten nur folgende einfache Folgerung aus Korollar 3.29 fest:

Lemma 3.30: Sobolev-Einbettung (kritisch allgemein, suboptimal)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < n$ mit $kp = n$, sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (1 \leq q < \infty).$$

Die analoge Aussage gilt auch ohne Lipschitz-Rand für $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Beweis. Nach Korollar 3.29 finden wir zu jedem $1 \leq q < \infty$ ein $p_q < \frac{n}{k} = p$, so dass $W^{k,p_q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. (Wieso?) Die Behauptung folgt, da Ω beschränkt angenommen ist, und daher die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_q}(\Omega)$ gilt. \square

Superkritischer Fall $p > n$

Im superkritischen Fall erhalten wir ein recht exaktes Analog zur Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung. Diese formulieren wir mit den Hölder-Räumen $C^{k,\gamma}(\Upsilon)$ für $0 < \gamma \leq 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$ auf Mengen $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$C^{k,\gamma}(\Upsilon) := \left\{ u \in C_b^k(\Upsilon) : \sup_{x \neq y \in \Upsilon} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty, |\alpha| = k \right\},$$

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\Upsilon)} := \|u\|_{C^k(\Upsilon)} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y \in \Upsilon} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^\gamma}{|x - y|}.$$

Wir verlangen also, dass die Ableitungen k -ter Ordnung Hölder-stetig vom Grad γ sind. Für $k = 0$ und $\gamma = 1$ erhalten wir Lipschitz-stetige Funktionen $C^{0,1}(\Upsilon)$. Damit ist der Hauptsatz im superkritischen Fall wie folgt:

Satz 3.31: Morrey's Ungleichung/Sobolev-Einbettung

Sei $n < p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante C , die nur von p und n abhängt, so dass

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in C^1(\mathbb{R}^n)), \quad (3.14)$$

wobei $\gamma := 1 - \frac{n}{p}$. Insbesondere gilt $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Morrey's Ungleichung (3.14) impliziert, dass für $p > n$ jede Äquivalenzklasse $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ einen γ -Hölder-stetigen Repräsentanten u_γ enthält. Für diesen gilt natürlich $u_\gamma = u$ fast überall. Wir betrachten im Zweifelsfall immer einen solchen (gleichmäßig) stetigen Repräsentanten.

Beweis von Satz 3.31. Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest. Wähle $r > 0$. Wir zeigen zuerst, dass es eine nur von n abhängige Konstante $C(n)$ gibt, so dass

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \, dy \leq C(n) \int_{B_r(x)} \frac{\|\nabla u(y)\|}{|y - x|^{n-1}} \, dy \quad (3.15)$$

gilt. Dies wird die entscheidende Abschätzung sein.

Dazu arbeiten wir uns von innen nach außen. Um die Differenz $|u(y) - u(x)|$ mittels des Gradienten ∇u abzuschätzen, kommt natürlich der Hauptsatz zum Einsatz. Sei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $|w| = 1$. Dann folgt für $0 < s < r$:

$$|u(x + sw) - u(x)| = \left| \int_0^s \nabla u(x + tw) \cdot w \, dt \right| \leq \int_0^s |\nabla u(x + tw)| \, dt.$$

Wir integrieren bezüglich w und transformieren $v = tw$ (Schmierpapier-Rechnung: $d\sigma(v) = t^{n-1} d\sigma(w)$), also

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} |u(x + sw) - u(x)| \, d\sigma(w) &\leq \int_{\partial B_1(0)} \int_0^s |\nabla u(x + tw)| \, dt \, d\sigma(w) \\ &= \int_0^s \int_{\partial B_t(0)} \frac{|\nabla u(x + v)|}{t^{n-1}} \, d\sigma(v) \, dt. \end{aligned}$$

Mit $y := x + v$, wobei $v \in \partial B_t(0)$, folgt $|x - y| = |v| = t$. Also:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} |u(x + sw) - u(x)| \, d\sigma(w) &\leq \int_0^s \int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, d\sigma(y) \, dt \\ &= \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy \leq \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy. \end{aligned}$$

Um nun auch links wieder ein Volumenintegral zu erhalten, multiplizieren wir beide Seiten mit s^{n-1} und integrieren von 0 bis r :

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| \, dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy,$$

und das war die (vorläufige) Behauptung (3.15) bis auf Faktoren, mit $C(n) := (n\alpha_n)^{-1}$.

Wir nutzen nun (3.15) um Morrey's Ungleichung (3.14) für die Supremum-Norm und die Hölder-Seminorm einzeln zu zeigen. Ersteres geht mittels Hölder-Ungleichung so:

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \int_{B_1(x)} |u(x)| \, dy \leq \int_{B_1(x)} |u(x) - u(y)| \, dy + \int_{B_1(x)} |u(y)| \, dy \\ &\leq C \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy + C \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B_1(x)} |x - y|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} \, dy \right) + C \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Wegen der Annahme $p > n$ ist $\frac{(1-n)p}{p-1} > -n$. Damit das Integral in der vorigen Ungleichung endlich und sein Wert hängt nicht von x ab. (Wir rechnen das gleich weiter unten noch einmal nach.) Es folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.16)$$

Nun beweisen wir noch eine Abschätzung für die Hölder-Halbnorm. Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $r := |x - y|$ und $W := B_r(x) \cap B_r(y)$. (Skizze!) Damit ist

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_W |u(x) - u(z)| dz + \int_W |u(y) - u(z)| dz.$$

Wir schätzen die Integrale mittels (3.15) und Hölder-Ungleichung ab:

$$\int_W |u(x) - u(z)| dz \leq \int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| dz \leq C \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \left(\int_{B_r(x)} |x - z|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Diesmal rechnen wir letzteres Integral konkret aus, da es vom Abstand $r = |x - y|$ abhängt:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |x - y|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} dy &= \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} |x - z|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} d\sigma(z) ds \\ &= \int_0^r s^{(1-n)\frac{p}{p-1}} \int_{\partial B_s(x)} d\sigma(z) ds \\ &= C \int_0^r s^{(1-n)\frac{p}{p-1}} s^{n-1} ds = Cr^{\frac{p-n}{p-1}}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_W |u(x) - u(z)| dz \leq Cr^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

und genauso für das andere W -Integral. Insgesamt ergibt sich, mit $r = |x - y|$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Da die Konstante C nicht von x, y abhängt, ergibt sich, zusammen mit (3.16), Morrey's Ungleichung (3.14).

Die Einbettung $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ folgt natürlich mittels Fortsetzung von der dichten Teilmenge $C^1(\mathbb{R}^n)$ auf $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, vgl. z.B. Lemma 3.21. \square

Wie schon im subkritischen Fall überträgt sich Satz 3.31 sofort auf Fortsetzungsgebiete. Für eine beschränkte bzw. kompakte Grundmenge liegen die Hölder-Räume ineinander: es gilt $C^{0,\alpha}(\Upsilon) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Upsilon)$ für $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, falls $\Upsilon \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist. (Nachrechnen!) Damit erhalten wir mit analogem Beweis wie für Satz 3.27:

Satz 3.32: Sobolev-Einbettung (superkritisch)

Sei $n < p \leq \infty$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes $(1, p)$ -Fortsetzungsgebiet. Dann gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \left(0 \leq \gamma \leq 1 - \frac{n}{p}\right).$$

Die Einbettung gilt auch ohne die Fortsetzungsgebiet-Annahme, wenn man $W^{1,p}(\Omega)$ durch $W_0^{1,p}(\Omega)$ ersetzt.

Natürlich lassen sich auch im superkritischen Fall Einbettungen für Sobolev-Räume höherer Ordnung iterativ herleiten. Die Aussage wird ein wenig komplizierter, aber auch interessanter; der Beweis folgt wieder iterativ wie bei Korollar 3.29.

Korollar 3.33: Sobolev-Einbettung (superkritisch allgemein)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n < p \leq \infty$ mit $kp > n$, sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann gilt⁶

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - 1, \gamma}(\bar{\Omega}) \quad \gamma := \begin{cases} 1 - \frac{n}{p} + \lfloor \frac{n}{p} \rfloor, & \text{wenn } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ \alpha \in [0, 1) & \text{wenn } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die analoge Aussage gilt auch ohne Lipschitz-Rand für $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Bemerkung 3.34

Der Einbettungssatz 3.31 gibt, via Korollar 3.33, nicht nur Auskunft über die Stetigkeit von Funktionen in Sobolev-Räumen, sondern auch über die Stetigkeit von Ableitungen. Man kann sich also anhand der jeweiligen Raumdimension ausrechnen, wie gross k bzw. p sein müssten, damit eine Funktion aus $W^{k,p}(\Omega)$ durch Einbettung wieder stetig oder gar stetig differenzierbar ist. Das kann sehr hilfreich sein, um zu zeigen, dass Lösungen zu partiellen Differentialgleichungen in einem schwachen Sinne, die üblicherweise in Sobolev-Räumen liegen, in Wahrheit klassisch differenzierbar sind und die Differentialgleichung auch im ursprünglichen (punktweisen) Sinn lösen.

Kompakte Einbettungen

Die Sobolev-Einbettungen wie in den Sätzen 3.27 und 3.32 sind hochgradig wertvolle Werkzeuge in der modernen Analysis von partiellen Differentialgleichungen. Ihre volle Wirksamkeit entfalten sie aber erst bei der Behandlung nichtlinearer Probleme. Dort sind auch besonders *kompakte* Einbettungen wichtig, die beschränkte bzw. schwach konvergente Folgen in stark konvergente in einem größeren Raum konvertieren. Daher ist der folgende Satz ebenfalls sehr weitreichend:

Satz 3.35: Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, und sei $k \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $1 \leq p < n$. Dann sind die Einbettungen

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{für } q < p^* = \frac{np}{n-p}$$

und, für $kp < n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m < k$,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega) \quad \text{für } q < p^*(k-m) = \frac{np}{n-p(k-m)}$$

jeweils kompakt.

⁶Floor Funktion: $\lfloor s \rfloor := \max\{\ell \in \mathbb{N} : \ell \leq s\}$.

(ii) Sei $n < p \leq \infty$. Dann ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 1 - \frac{n}{p}, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

kompakt.

Der vorige Kompaktheitssatz ist nicht nur für nichtlineare Probleme fundamental, sondern auch nützlich, um diverse weitere Eigenschaften von Sobolev-Funktionen zu beweisen. Unter anderem lässt sich damit die *Poincaré-Ungleichung*

$$\left\| u - \int_{\Omega} u(x) \, dx \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (u \in W^{1,p}(\Omega))$$

beweisen, vgl. Satz 2.24; siehe die Übungen.

Wir sammeln auch noch eine weitere Konsequenz ein:

Korollar 3.36

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und sei $\partial\Omega$ ein C^1 -Rand. Dann ist der Spuroperator $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega; \sigma)$ für $1 < p < \infty$ aus Satz 3.15 *kompakt*.

Beweis. Das folgt direkt aus der bewiesenen multiplikativen Ungleichung in Satz 3.15, denn: Sei (u_k) eine beschränkte Folge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach dem Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz 3.35 eine Teilfolge (u_{k_ℓ}) , die in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Diese ist insbesondere eine Cauchyfolge. Wegen

$$\left\| \text{tr } u_{k_\ell} - \text{tr } u_{k_m} \right\|_{L^p(\partial\Omega; \sigma)} \leq C(p) \|u_{k_\ell} - u_{k_m}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \|u_{k_\ell} - u_{k_m}\|_{L^p(\Omega)}^{1-\frac{1}{p}}$$

ist $(\text{tr } u_{k_\ell})$ auch eine Cauchyfolge im Banachraum $L^p(\partial\Omega; \sigma)$ und damit konvergent. Also ist tr ein kompakter Operator $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega; \sigma)$. \square

3.3 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung

Wir führen nun ein *schwaches* Lösungskonzept für elliptische PDGLn zweiter Ordnung ein, das wesentlich auf der gerade entwickelten Theorie von Sobolev-Räumen basiert. Dabei betrachten wir das am Anfang des Kapitels eingeführte Standardproblem $Lu = f$ wie in (3.1) in Divergenzform, also mit

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$$

mit geeigneten Koeffizientenfunktionen $(a_{ij}), (b_i)$ und c , vgl. (3.3) und setzen immer voraus, dass die Koeffizientenmatrix a bzw. der Differentialoperator L gleichmäßig elliptisch auf Ω ist. Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand.

Die Herleitung bzw. Motivation des üblichen Begriffs der schwachen Lösung kann je nach Präferenz aus verschiedenen Richtungen geschehen. Es empfiehlt sich, diese Blickwinkel in

verschiedener Literatur einzeln nachzuvollziehen und zu vergleichen. An dieser Stelle wollen wir mit dem Dirichlet-Problem

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{auf } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

beginnen und dessen schwache Formulierung danach interpretieren und zum Neumann-Problem übertragen. Nehmen wir für den Moment an, dass die Daten in (3.17) hinreichend gutartig sind, und wir eine Lösung u mit z.B. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ zur Hand haben, die (3.17) punktweise erfüllt. Multiplizieren wir die Gleichung auf Ω mit einer Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und führen eine Integration über Ω aus, so liefert der Gaußsche Integralsatz:

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx + \int_{\Omega} cu \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \quad (3.18)$$

Ist umgekehrt (3.18) für eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit $u|_{\partial\Omega} = g$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt, so erhalten wir, nachdem wir den Satz von Gauß rückgängig gemacht haben und das Fundamentallemma der Variationsrechnung angewendet haben, die Differentialgleichung (3.17) auf Ω zurück. Folglich sind für hinreichend glatte (*klassische*) Lösungen, die die gestellte Randbedingung erfüllen, die Formulierungen (3.18) und (3.17) *äquivalent*.

Andererseits ist es für eine sinnvolle Formulierung (3.18) gar nicht notwendig, dass u tatsächlich klassisch differenzierbar ist, und auch bei den Daten brauchen wir keine Glattheits-Annahmen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass (ab sofort)

$$\boxed{a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega) \quad \text{und} \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad (3.19)$$

gilt. Dann ist (3.18) sowie die (verallgemeinerte) Bedingung $\text{tr } u = g$ für jede Sobolev-Funktion $u \in H^1(\Omega)$ wohldefiniert, vgl. Satz 3.16. Das führt auf den folgenden fundamentalen Begriff:

Definition 3.37: Schwache Lösung, Dirichlet-Problem

Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = g$ heißt *schwache Lösung* des Dirichlet-Problems (3.17), falls

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx + \int_{\Omega} cu \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)). \quad (3.20)$$

Bemerkung 3.38

1. Falls $g = 0$, also homogene Randbedingung, wird die Bedingung $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = 0$ durch die Bedingung $u \in H_0^1(\Omega)$ ersetzt. Unter der angenommenen Randregularität sind beide nach Lemma 3.22 äquivalent.
2. Wie in der Herleitung gesehen, ist jede klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von (3.17) auch eine schwache Lösung. Die Umkehrung, also wann eine schwache Lösung auch eine klassische ist, ist eine sehr wichtige Frage und wird uns noch weiter beschäftigen.
3. Mit $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ steht rechts in (3.20) in Wahrheit

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Die Formulierung als Dualität wie in (3.20) wird sich noch als praktikabel erweisen.

Dass das Konzept der schwachen Lösung allgemeiner ist als das der klassischen Lösung, sieht man sehr einfach in folgendem Beispiel.

Beispiel

Sei $n \geq 3$ und $\Omega = B_1(0)$ die Einheitskugel im \mathbb{R}^n . Wir betrachten die Funktionen

$$u(x) = |x|^\alpha - 1, \quad f(x) = -\alpha(n + \alpha - 2)|x|^{\alpha-2} \quad (x \neq 0)$$

als fast überall definierte Funktionen auf $B_1(0)$. Für $2 - \frac{n}{2} < \alpha \leq 1$ gilt

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{und} \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

außerdem ist u eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Es ist aber sicher keine klassische Lösung, da $u \notin C^1(\Omega)$.

Formulierung mittels Bilinearform und Interpretation

Die linke Seite in der schwachen Formulierung (3.20) definiert eine Bilinearform, der wir für weitere Verwendung einen Namen geben.

Definition 3.39: Assoziierte Bilinearform

Seien die Daten im Differentialoperator L wie in (3.19) angenommen. Dann nennen wir

$$B(u, v) := \int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx$$

die (mit dem Differentialoperator L) *assoziierte Bilinearform* auf $H^1(\Omega)$.

Mit den Annahmen (3.19) ist B eine stetige Bilinearform. (Wir werden das noch nachrechnen.) Beachte, dass wir B rein mit dem Differentialoperator L assoziiert definiert haben, für die Verbindung zum Randwertproblem (3.17) muss noch die Randbedingung berücksichtigt werden.

Im Fall des Dirichlet-Problems (3.17) ist $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = g$ genau dann schwache Lösung, wenn

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H_0^1(\Omega)) \quad (3.21)$$

gilt. Das folgt aus der Dichtheit (per Definition) von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ und der Stetigkeit von B auf $H^1(\Omega)$. In dieser Formulierung erkennt man auch sofort, dass wir beim schwachen

Lösungskonzept statt $f \in L^2(\Omega)$ auch $f \in H^{-1}(\Omega)$ zulassen können, d.h. nach Satz 3.25 Distributionen f der Form

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^n \partial_i f_i, \quad f_0, \dots, f_n \in L^2(\Omega).$$

Dies erlaubt unter anderem, die im kommenden zunächst für homogene Randbedingungen entwickelte Existenztheorie auch für inhomogene Randbedingungen zu erhalten, worauf wir später zurück kommen.

Eine mögliche Interpretation der schwachen Lösungsformulierung ist die folgende. Aus der schwachen Formulierung (3.20) folgt direkt (im Kopf: mittels nochmaliger Anwendung des Satzes von Gauß)

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (3.22)$$

Tatsächlich erfüllt eine schwache Lösung also die partielle Differentialgleichung (3.17) im distributionellen Sinne. Dies ist nicht verwunderlich, da der distributionelle Sinn der schwächste mögliche ist. Interessant ist aber die Umkehrung, denn wenn wir annehmen, dass die Distribution u die distributionelle Differentialgleichung (3.22) erfüllt, und *zusätzlich* $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = g$ gilt, dann erhält man—wieder mittels Satz von Gauß in die andere Richtung—exakt die schwache Formulierung (3.20) bzw. (3.21). Es gilt also für das Dirichlet-Problem:

$$u \text{ schwache Lösung} \iff u \text{ distributionelle Lösung und } u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \text{tr } u = g.$$

Diese Äquivalenz ist im Falle des Dirichlet-Problems besonders elegant aufgrund des fundamentalen Zusammenhangs zwischen den Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$.

Wir nutzen vorige Interpretation, um eine schwache Formulierung für das Neumann-Problem herzuleiten. Dazu betrachten wir

$$\left. \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{auf } \Omega \\ \partial_\nu u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

mit, der Übersichtlichkeit halber, $Lu = -\Delta u + u$. Nehmen wir also an, die Distribution u sei distributionelle Lösung von $-\Delta u + u = f$, und zusätzlich sei $u \in H^1(\Omega)$. Ist $f \in L^2(\Omega)$, so ist $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$ tatsächlich eine reguläre Distribution. Weiter ist nach Abschnitt 3.2.6 die Normalenableitung $\partial_\nu u$ wohldefiniert, und wir fordern $\partial_\nu u = g$. Dazu muss $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ sein, z.B. $g \in L^2(\partial\Omega)$. Dann folgt

$$\langle g, \text{tr } v \rangle = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + \Delta uv] \, dx = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv - fv] \, dx \quad (u, v \in H^1(\Omega)),$$

also

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle + \langle g, \text{tr } v \rangle \quad (u, v \in H^1(\Omega)). \quad (3.24)$$

(Man beachte die Unterschiede zu (3.21)!) Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 3.40: Schwache Lösung, Neumann-Problem

Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* des Neumann-Problems (3.23), falls

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx = \langle f, v \rangle + \langle g, \text{tr } v \rangle \quad (v \in H^1(\Omega)). \quad (3.25)$$

Die Umkehrung der obigen Herleitung ist durch Testen mit $v \in C_0^\infty(\Omega)$ leicht zu sehen, d.h. wir erhalten für das Neumann-Problem mit $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$:

$$u \text{ schwache Lösung} \iff u \text{ distributionelle Lösung und } u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \partial_\nu u = g.$$

Achtung: Genau wie beim Dirichlet-Problem macht die schwache Formulierung des Neumann-Problems, siehe besonders (3.24), auch Sinn für $f \in H^1(\Omega)^*$. Dann ist die vorige Äquivalenz aber nicht mehr sinnvoll, da $\partial_\nu u$ dann nicht definiert ist.⁷ Trotzdem ist (3.25) auch in diesem Fall ein valides Lösungskonzept.

Bemerkung 3.41

Schwache Formulierungen für noch andere Arten von Randbedingungen lassen sich auf ganz analoge Art und Weise herleiten. Es sind besonders *gemischte Randbedingungen* der Form

$$u = g_D \quad \text{auf } \Gamma \subseteq \partial\Omega, \quad \partial_\nu u = g_N \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma$$

oder *Robin-Randbedingungen*

$$\partial_\nu u + u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

interessant.

3.4 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Schon die Formulierung des schwachen Lösungskonzeptes mittels Bilinearformen in einem Hilbertraum wie in (3.21) und (3.24) weist darauf hin: Um Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen zu den betrachteten Problemen (3.17) (Dirichlet-Randbedingungen) und (3.23) (Neumann-Randbedingungen) zu erhalten, nutzen wir den Satz von Lax-Milgram (Satz 3.2) ganz wesentlich.

Dazu benötigen wir:

- (a) Einen Hilbertraum X , der den Lösungs- und Testraum darstellt,
- (b) eine koerzive, beschränkte Bilinearform $B: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, und
- (c) ein Element $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem Dualraum X^* .

⁷Natürlich lässt sich die Definition einer schwachen Lösung des Neumann-Problems als verallgemeinerte Definition der Eigenschaft $\partial_\nu u = g$ betrachten—dies führt aber leider nicht zu besseren Einsichten, sondern ist nur konform mit unseren bisherigen Definitionen.

In den Formulierungen (3.21) und (3.24) war bislang die Lösungskomponente noch mit Randbedingungen versehen. Eine solche Menge von Funktionen stellt aber keinen linearen Raum dar, was ein fundamentales Problem darstellt, zudem müssen Test- und Lösungsraum für den Satz von Lax-Milgram gleich sein. Dementsprechend:

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst nur homogene Randbedingungen.

Damit erhalten wir als schwache Formulierung für das Dirichlet-Problem (3.17):

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

bzw. für das Neumann-Problem (3.23)

$$u \in H^1(\Omega), \quad B(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H^1(\Omega)),$$

jeweils mit der zu L assoziierten Bilinearform

$$B(u, v) := \int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (b \cdot \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx \quad (u, v \in H^1(\Omega)).$$

Die vorigen Formulierungen sind bereits genau in der für den Satz von Lax-Milgram passenden Form. Es bleibt, nachzuweisen, dass die Bilinearform B auch die Annahmen aus dem Satz von Lax-Milgram erfüllt, wenn wir (3.19) annehmen.

Zunächst rechnen wir nach, dass B stetig auf $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ist. Das folgt direkt mit der Hölder- bzw. Cauchy-Schwarz-Ungleichung, denn für alle $u, v \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \left[\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \right] \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |\nabla v(x)| \, dx \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right] \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |v(x)| \, dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |u(x)| |v(x)| \, dx \\ &\leq \alpha \left(\int_{\Omega} [|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2] \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} [|v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2] \, dx \right)^{1/2} \\ &= \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hier haben wir die L^∞ -Normen der Koeffizienten (a_{ij}) , (b_i) und c in die Konstante α absorbiert und großzügig zusammengefasst.

Nun untersuchen wir die mit L assoziierte Bilinearform auf Koerzivität. Das ist die fundamentale Eigenschaft, die uns die dann folgende Lösungstheorie beschert, und baut natürlich auf der Annahme auf, dass L gleichmäßig elliptisch sein soll, vgl. (3.4). Es stellt sich heraus, dass die Präsenz der Terme niedrigerer Ordnung bedingt, dass B nicht notwendig direkt koerziv sein muss; dies wird durch Eigenschaften der Funktionen (b_i) und c bestimmt. Das präzise Resultat ist wie folgt:

Satz 3.42: Energie-Abschätzung für L

Sei L wie in (3.17) ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit Konstante $\theta > 0$

und assoziierter Bilinearform B . Seien die Daten wie in (3.19). Dann gilt

$$B(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (u \in H^1(\Omega))$$

mit

$$\gamma := \frac{\left[\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right]^2}{2\theta} - \operatorname{ess\,inf}_\Omega c.$$

Beweis. Mittels der gleichmäßigen Elliptizität von L mit Konstante $\theta > 0$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \theta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\leq \int_\Omega (a \nabla u) \cdot \nabla u dx \\ &= B(u, u) - \int_\Omega \left[(b \cdot \nabla u)u + cu^2 \right] dx \\ &\leq B(u, u) + \left[\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right] \int_\Omega |\nabla u| |u| dx - \int_\Omega cu^2 dx. \end{aligned}$$

Das mittlere Integral schätzen wir mit der *Young-Ungleichung* mit Gewicht ε ab:

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (a, b \geq 0, \varepsilon > 0). \quad (3.26)$$

Dabei wählen wir $a = |\nabla u(x)|$ und $b = |u(x)|$ und

$$\varepsilon = \frac{\theta}{2} \left[\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right]^{-1}.$$

Dann erhalten wir

$$\frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega cu^2 dx \leq B(u, u) + \frac{\left[\sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right]^2}{2\theta} \int_\Omega u^2 dx$$

und die Behauptung folgt wegen

$$(\operatorname{ess\,inf}_\Omega c) \int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega cu^2 dx. \quad \square$$

Falls in der Energie-Abschätzung in Satz 3.42 $\gamma > 0$ gilt, so ist die Bilinearform B auf keinen Fall koerziv. Damit sind die Bedingungen des Satzes von Lax-Milgram nicht genau erfüllt. Diesem Umstand wird im folgenden Satz Rechnung getragen.

Satz 3.43: Existenz und Eindeutigkeit für schwache Lösungen (Dirichlet-Problem)

Sei L wie in (3.17) ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator und seien die Daten wie in (3.19). Dann existiert eine Konstante $\gamma \geq 0$, so dass für jedes $\mu \geq \gamma$ das Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} Lu + \mu u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Weiter gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\theta} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Falls $b = 0$ und $c \geq 0$, so kann $\gamma = 0$ gewählt werden.

Beweis. Sei B die zu L assoziierte Bilinearform. Dann ist $B_\mu: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$B_\mu(u, v) := B(u, v) + \mu(u, v)_{L^2(\Omega)} \quad (u, v \in H_0^1(\Omega)),$$

die zu $L + \mu$ assoziierte Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$. Diese ist natürlich weiterhin stetig.

Sei nun γ die Konstante aus Satz 3.42 und $\mu \geq \gamma$. Dann gilt

$$B_\mu(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + (\mu - \gamma) \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\theta}{2} |u|_{H_0^1(\Omega)} \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Von der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (Satz 3.28) wissen wir, dass $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} =: |u|_{H_0^1(\Omega)}$ eine äquivalente Norm auf $H_0^1(\Omega)$ ist. Also ist B_μ koerziv auf $H_0^1(\Omega)$.

Nach dem Satz von Lax-Milgram (Satz 3.2) existiert eine eindeutige Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$, für die

$$B_\mu(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

gilt. Das bedeutet aber genau, dass u die schwache Lösung von (3.27) ist. Der Satz liefert weiterhin, dass

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\theta} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

gilt, da $\frac{\theta}{2}$ eine Koerzivitätskonstante von B_μ ist, wie im Beweis gesehen. \square

Beispiel 3.44

Satz 3.43 zeigt, dass die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randwerten

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, und die Lösung stetig von f abhängt. Der lineare Lösungsoperator $f \mapsto u$ ist also wohldefiniert und stetig $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, tatsächlich sogar $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$.

Im Falle des Neumann-Problems betrachten wir die Bilinearform B auf dem Raum $H^1(\Omega)$ statt $H_0^1(\Omega)$. Hier ist $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ keine äquivalente Norm mehr, weshalb das folgende Resultat etwas einschränkender wird. Anschaulich ist auch klar, dass hier eine Einschränkung auftreten muss, da ausgeschlossen werden muss, dass konstante Funktionen Lösungen des Randwertproblems sind, siehe auch Bemerkung 3.46 unten.

Satz 3.45: Existenz und Eindeutigkeit für schwache Lösungen (Neumann-Problem)

Sei L wie in (3.23) ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator und seien die Daten wie

in (3.19). Dann existiert eine Konstante γ , so dass für jedes $\mu > \gamma$ das Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} Lu + \mu u &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_\nu u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ besitzt. Weiter gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(\frac{\theta}{2}, \mu - \gamma)} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Falls $b = 0$ und $c \geq \delta$ mit einer Konstanten $\delta > 0$, so kann $\mu = 0$ gewählt werden.

Beweis. Sei B die zu L assoziierte Bilinearform. Wie im Beweis von Satz 3.43 betrachten wir die Bilinearform $B_\mu: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei wieder γ die Konstante aus Satz 3.42. Dann gilt

$$B_\mu(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + (\mu - \gamma) \|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \min(\frac{\theta}{2}, \mu - \gamma) \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (u \in H^1(\Omega)).$$

Also ist für $\mu > \gamma$ die Bilinearform B_μ koerziv auf $H^1(\Omega)$ und, wie zuvor, existiert nach dem Satz von Lax-Milgram eine eindeutige Funktion $u \in H^1(\Omega)$, für die

$$B_\mu(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H^1(\Omega))$$

gilt. Also ist u die schwache Lösung von (3.28). Die Abschätzung folgt wie zuvor. \square

Bemerkung 3.46

Im vorigen Satz 3.45 ist $\mu = 0$ nur möglich, wenn für die Konstante γ aus der Energie-Abschätzung in Satz 3.42 $\gamma < 0$ gilt. Insbesondere ist das für das Poisson-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

nicht der Fall. Das war auch nicht zu erwarten, da dieses Problem ohne weitere Einschränkungen keine eindeutige Lösung haben wird. (Konstanten addieren!)

Durch Einschränkung auf *mittelwertfreie* Daten und Lösungen kann man aber wieder eine Poincaré-Ungleichung erhalten, vgl. Satz 2.24, und dann auch für $\mu = 0$ wie in Satz 3.43 argumentieren. Siehe dazu die Übungen.

An den kurzen Beweisen im vorigen Abschnitt sieht man, wie elegant und stark die Hilbertraum-Maschinerie für schwache Lösungen ist, wenn man sich die entsprechende Sobolevraum-Theorie angeeignet hat. Dabei ist die Hilbertraum-Struktur und das entsprechende Resultat von Lax-Milgram fundamental. Schon zum Beispiel die Frage, ob für $f \in L^p(\Omega)$ mit $p > 2$ auch eine eindeutige schwache Lösung $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert, ist im Allgemeinen hochgradig nichttrivial und nur mit erheblich tieferen Methoden zu beantworten.

Zudem haben wir noch die Einschränkung, dass die Existenztheorie aus den Sätzen 3.43 und 3.45 nur unter gewissen Bedingungen an die Koeffizienten b, c für das ursprüngliche Problem $Lu = f$ (plus Randbedingungen) ohne die μ -Verschiebung gültig ist. Hier gibt es Möglichkeiten, auch ohne

solche Bedingungen eine präzise Existenztheorie zu etablieren; diese basiert auf der sogenannten *Fredholm-Theorie*, einem Teilgebiet der Spektraltheorie, und erfordert tiefergehende Resultate aus der Funktionalanalysis. Sie basiert auf der folgenden Beobachtung:

Bemerkung 3.47: Kompaktheit Lösungsoperator

Wir hatten bereits im obigen Beispiel 3.44 festgestellt, dass sich die Abschätzungen in den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen in den Sätzen 3.43 und 3.45 als *Stetigkeit* der Lösungsoperatoren $f \mapsto u$ für (3.27) (Dirichlet-Problem) bzw. (3.28) (Neumann-Problem) bezüglich der Räume $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ bzw. $H^1(\Omega)^* \rightarrow H^1(\Omega)$ interpretieren lassen.

Dies ist Stetigkeit bezüglich der gröbsten Topologie, so dass das Problem noch wohlgestellt ist. Tatsächlich sind die Lösungsoperatoren aber wesentlich besser, wenn man sich auf reguläre Daten $f \in L^2(\Omega)$, wie sie in der schwachen Formulierung klassischer Randwertprobleme wie in (3.17) auftreten, beschränkt. Wir bleiben dafür gerade beim Dirichlet-Problem. Da $\iota: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ eine *kompakte* Einbettung nach dem Rellich-Kondrachov Kompaktheitsatz 3.35 ist, ist auch die Einbettung $\iota^*: L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ kompakt.⁸ Bezeichnet dann $f \mapsto u_f$ den Lösungsoperator für das Dirichlet-Problem mit homogenen Randwerten $H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, so faktorisieren wir den Lösungsoperator $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ wie folgt:

$$g \in L^2(\Omega) \xrightarrow[\text{(kompakt)}]{\text{Einbettung}} \iota g \in H^{-1}(\Omega) \xrightarrow[\text{(stetig)}]{\text{Lösungsoperator}} u_{\iota g} \in H_0^1(\Omega).$$

Da eine Verkettung eines kompakten und eines beschränkten Operators wieder kompakt ist, folgt, dass der Lösungsoperator des Dirichlet-Problems mit homogenen Randwerten *kompakt* $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist. Ein analoges Resultat gilt für das Neumann-Problem.

Eine natürliche folgende Fragestellung ist nun, ob und wann schwache Lösungen in Wirklichkeit schon klassische Lösungen sind. Bevor wir uns dieser Frage zuwenden, behandeln wir noch kurz den Fall inhomogener Randdaten in den vorigen Problemen.

Inhomogene Randdaten

Nun betrachten wir statt den bisher untersuchten homogenen Randbedingungen eben inhomogene solche. Wir beschreiben das Vorgehen und führen die Details nicht komplett aus.

Zunächst zum Dirichlet-Problem, direkt in der um μ verschobenen Version:

$$Lu + \mu u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{3.29}$$

Nach Definition 3.37 ist eine schwache Lösung von (3.29) eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit $\text{tr } u = g$, so dass

$$B_\mu(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

⁸Dahinter steckt der *Satz von Schauder*: Ein linearer Operator A ist *genau dann* kompakt, wenn sein adjungierter Operator A^* kompakt ist. Man kann die Kompaktheit von $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ aber auch von Hand nachrechnen, siehe die Übungen. (Hier benutzt man aber natürlich dann auch, dass $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist.)

gilt. Als Spur einer $H^1(\Omega)$ -Funktion ist die Annahme $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ passend, denn zu jeder Funktion $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ gibt es $w \in H^1(\Omega)$, so dass $\text{tr } w = g$ gilt. (Spursatz 3.16!) Wir führen den Fall inhomogener Randdaten auf homogene zurück. Es gilt:

$$v \mapsto B_\mu(w, v) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}) = H^{-1}(\Omega),$$

und im Kontext von (3.21) hatten wir bereits bemerkt, dass die schwache Formulierung des Dirichlet-Problems auch für rechte Seiten in $H^{-1}(\Omega)$ sinnvoll ist. Nach Satz 3.43 gibt es eine Konstante γ , so dass das Problem

$$B_\mu(u_0, v) = \langle f, v \rangle - B_\mu(w, v) \quad (v \in H_0^1(\Omega))$$

für jedes $\mu \geq \gamma$ eine eindeutige Lösung $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ hat. Dann ist $u := u_0 + w$ die eindeutige schwache Lösung von (3.29) für $\mu \geq \gamma$, da nach Lemma 3.22 die Spur von w erhalten bleibt, wenn wir eine $H_0^1(\Omega)$ -Funktion zu w addieren. Zudem existiert eine Konstante C , so dass gilt:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}).$$

Das bedeutet, dass der lineare Lösungsoperator $(f, g) \mapsto u$ des Dirichlet-Problems mit inhomogenen Randwerten stetig $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist.

Für das Neumann-Problem

$$Lu + \mu u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_\nu u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.30)$$

ist das Vorgehen direkter. Hier war nach Definition 3.40 eine schwache Lösung von (3.30) eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$, so dass

$$B_\mu(u, v) = \langle f, v \rangle + \langle g, \text{tr } v \rangle \quad (v \in H^1(\Omega))$$

gilt. Das führt zur Annahme $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Damit ist die rechte Seite in der vorigen Gleichung aus $H^1(\Omega)^*$ und Satz 3.45 liefert direkt eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (3.30) für $\mu > \gamma$. Diese erfüllt zudem

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^1(\Omega)^*} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)})$$

mit einer Konstanten C . Analog erhalten wir, dass der lineare Lösungsoperator $(f, g) \mapsto u$ des Neumann-Problems mit inhomogenen Randwerten stetig $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ ist.

Achtung: Die so etablierten Lösungsoperatoren der Probleme mit inhomogenen Randwerten sind *nicht* kompakt wenn man $f \in L^2(\Omega)$ betrachtet, solange man die Regularität der Randwerte nicht auch (kompakt) verbessert.

3.5 Regularität

Für die nun erhaltenen schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ bzw. $u \in H^1(\Omega)$ versucht man nun *a posteriori*—unter geeigneten Voraussetzungen an die Daten—zu zeigen, dass sie tatsächlich klassische Lösungen sind, also z.B. $u \in C^2(\Omega)$ gilt. Dies gelingt im Allgemeinen nicht direkt, sondern indem man zunächst nachweist, dass (beispielsweise) $u \in H^{m+2}(\Omega)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ ist, und anschließend die Einbettungssätze für Sobolev-Funktionen (Satz 3.32) anwendet.

Zunächst, was können wir erwarten? Wir betrachten exemplarisch das Dirichlet-Problem mit $Lu = -\Delta u$ und homogenen Randwerten $g = 0$. Bei der Diskussion des schwachen Lösungskonzeptes haben wir schon festgestellt, dass die schwache Lösung charakterisiert ist durch $-\Delta u = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$. Für $f \in L^2(\Omega)$ folgt also $\Delta u \in L^2(\Omega)$, was in Raumdimension $n = 1$ schon $u \in H^2(\Omega)$ impliziert.

In höheren Raumdimensionen $n \geq 2$ ist dieser Schritt allerdings nicht klar, da in Δu ja nur die "diagonalen" zweiten Ableitungen vorkommen, und nicht offensichtlich ist, wieso $\Delta u \in L^2(\Omega) \implies u \in H^2(\Omega)$ gelten sollte. Andererseits ist das heuristisch durchaus plausibel, denn mit $f = -\Delta u$ folgt folgende Schmierblattrechnung:

$$\begin{aligned} \int f^2 dx &= \int (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int (\partial_{ii}^2 u)(\partial_{jj}^2 u) dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int (\partial_{ij}^3 u)(\partial_j u) dx = \sum_{i,j=1}^n \int (\partial_{ij}^2 u)^2 dx = \int |\nabla^2 u|^2 dx, \end{aligned}$$

also sind alle zweiten Ableitungen in $\nabla^2 u$ in der L^2 -Norm durch die L^2 -Norm von $f = -\Delta u$ kontrolliert. Man kann also durchaus hoffen, dass Integrierbarkeit von Δu auch Integrierbarkeit von $\nabla^2 u$ impliziert. Noch ein wenig schamloser ist die Beobachtung, dass man $-\Delta u = f$ noch einmal partiell differenzieren und die Reihenfolge der Ableitungen vertauschen könnte, so dass man

$$-\Delta \bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{u} := \partial_i u, \quad \bar{f} = \partial_i f \quad (i = 1, \dots, n)$$

und damit eine L^2 -Kontrolle *dritter* Ableitungen von u durch *erste* Ableitungen von f in $L^2(\Omega)$ erhält. Das kann man solange durchführen, wie die rechte Seite $\partial_i f$ noch in $L^2(\Omega)$ liegt; insgesamt lesen wir daraus die Heuristik ab: Wenn $-\Delta u = f \in H^m(\Omega)$, dann $u \in H^{m+2}(\Omega)$. (Das ist konsistent damit, dass L , in diesem Fall $-\Delta$, ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, und damit optimalerweise genau zwischen Funktionenräumen mit Differenzierbarkeits-Differenz 2 operieren sollte!)

Um entsprechende Resultate auch auf rigorose Art und Weise zu erhalten, brauchen wir ein wenig Vorarbeit.

Differenzenquotienten und Eigenschaften

Um die Differenzierbarkeit schwacher Lösungen zu untersuchen, betrachten wir Differenzenquotienten, welche die schwachen Ableitungen approximieren.

Definition 3.48: Differenzenquotienten

Für $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega' \Subset \Omega$ definieren wir den *Differenzenquotienten* $\Delta_e^h u \in L^p(\Omega')$ in Richtung $e \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta_e^h u(x) := \frac{u(x + he) - u(x)}{h} \quad (x \in \Omega', \quad 0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)).$$

Wir schreiben auch $\Delta_i^h := \Delta_{e_i}^h$, wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i -te Einheitsvektor ist.

Im Gegensatz zu den Differentialoperatoren ∂_i sind die Differenzenquotienten Δ_i^h für beliebige Funktionen f definiert.

Es gelten die folgenden Rechenregeln (siehe die Übungen), mit $\Omega' \Subset \Omega$:

(a) **Produktregel:** Es gilt

$$[\Delta_e^h(fg)](x) = f(x+he)\Delta_e^h g(x) + \Delta_e^h f(x)g(x) \quad (x \in \Omega'). \quad (3.31)$$

(b) **Partielle Integration:** Für $f, g \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega'} \Delta_e^h f(x) g(x) dx = - \int_{\Omega'} f(x) \Delta_e^{-h} g(x) dx. \quad (3.32)$$

(c) **Vertauschung mit ∂_i :** Für $f, \partial_i f \in L^1(\Omega)$ gilt

$$[\Delta_e^h(\partial_i f)](x) = [\partial_i(\Delta_e^h f)](x) \quad (x \in \Omega'). \quad (3.33)$$

Natürlich gilt formell $\partial_i = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_i^h$ punktweise bzw. gleichmäßig, wenn man sich auf geeignet differenzierbare Funktionen einschränkt. Der folgende Satz zeigt, dass diese Interpretation auch im L^p -Sinne gilt, wenn man Sobolev-Funktionen betrachtet.

Satz 3.49: Eigenschaften der Differenzenquotienten

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für jeden Einheitsvektor $e \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $\Omega' \Subset \Omega$:

- (i) $\|\Delta_e^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\nabla u \cdot e\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ für alle $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$,
- (ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|\nabla u \cdot e - \Delta_e^h u\|_{L^p(\Omega')} = 0$.

Beweis. (i) Für $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ und $\text{dist}(x, \partial\Omega) > |h|$, sei $v(t) := u(x + t e)$. Dann gilt:

$$\Delta_e^h u(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 v'(t) dt = \int_0^1 \nabla u(x + t e) \cdot e dt.$$

Insbesondere ist (Jensen'sche Ungleichung, $t \mapsto |t|^p$ ist konvex!)

$$|\Delta_e^h u(x)|^p \leq \int_0^1 |\nabla u(x + t e) \cdot e|^p dt,$$

und mit Integration über Ω' erhält man

$$\int_{\Omega'} |\Delta_e^h u(x)|^p dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega'} |\nabla u(x + t e) \cdot e|^p dx dt \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot e|^p dx$$

Dies zeigt die Aussage für $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Allgemeine $u \in W^{1,p}(\Omega)$ approximieren wir durch Funktionen aus $C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ in der $W^{1,p}$ -Norm, siehe Satz 3.12.

(ii) Sei $\Omega' \Subset \Omega$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert (wieder Satz 3.12) eine Funktion $v \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Mit dieser schätzen wir für $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ ab:

$$\begin{aligned} \|\nabla u \cdot e - \Delta_e^h u\|_{L^p(\Omega')} &\leq \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v \cdot e - \Delta_e^h v\|_{L^p(\Omega')} + \|\Delta_e^h v - \Delta_e^h u\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|\nabla v - \Delta_e^h v\|_{L^p(\Omega')} + \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|\nabla v - \Delta_e^h v\|_{L^p(\Omega')}. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ folgt nun $\Delta_e^h v \rightarrow \nabla v \cdot e$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, da $v \in C^1(\Omega)$ nach Annahme und $\overline{\Omega'}$ kompakt ist. Das impliziert die Behauptung. \square

Der folgende Satz liefert eine wichtige Charakterisierung um die Existenz der partiellen Ableitung $\partial_i u$ in $L^p(\Omega)$ mithilfe der Differenzenquotienten $\Delta_i^h u$ zu zeigen. (Die umgekehrte Aussage ist Teil von Satz 3.49 mit $e = e_i$.)

Satz 3.50: Differenzenquotienten und Existenz schwacher Ableitungen

Sei $u \in L^p(\Omega)$ und $1 < p < \infty$. Sei weiter $\Omega' \Subset \Omega$ und es existiere eine Konstante $C = C(\Omega')$ und ein $\delta \leq \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so dass gilt:

$$\|\Delta_i^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq C \quad (0 < |h| < \delta).$$

Dann ist $\partial_i u \in L^p(\Omega')$ mit

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega')} \leq C.$$

Gilt voriges für jedes $\Omega' \Subset \Omega$, so folgt $\partial_i u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Falls zusätzlich die jeweiligen Konstanten $C(\Omega')$ unabhängig von Ω' gewählt werden können, gilt sogar $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ und

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

Beweis. Sei $\Omega' \Subset \Omega$ gegeben. Die Familie $(\Delta_i^h u)_h$ für $0 < |h| < \delta$ ist nach Annahme beschränkt in $L^p(\Omega')$. Nach der Funktionalanalysis-Wiederholung am Anfang des Kapitels existiert also eine Folge (h_k) mit $h_k \searrow 0$ und ein $v \in L^p(\Omega')$, so dass (im Sinne von (3.5))

$$\Delta_i^{h_k} u \rightharpoonup v \quad \text{schwach in } L^p(\Omega'). \quad (3.34)$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ folgt dann mittels (3.34) und (3.32):

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle &= \int_{\Omega'} v(x) \varphi(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} \Delta_i^{h_k} u(x) \varphi(x) \, dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} u(x) \Delta_i^{-h_k} \varphi(x) \, dx \\ &= - \int_{\Omega'} u(x) \partial_i \varphi(x) \, dx = \langle \partial_i u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also $\partial_i u = v \in L^p(\Omega')$. Da $\text{sgn}(v)|v|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega')$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ wenn $v \in L^p(\Omega')$, folgt zudem

$$\|v\|_{L^p(\Omega')}^p = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} (\Delta_i^{h_k} u) \text{sgn}(v)|v|^{p-1} \, dx \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\Delta_i^{h_k} u\|_{L^p(\Omega')} \|v\|_{L^p(\Omega')}^{p-1} \leq C \|v\|_{L^p(\Omega')}^{p-1},$$

also $\|v\|_{L^p(\Omega')} = \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega')} \leq C$.

Gilt die Annahme nun für *jedes* $\Omega' \Subset \Omega$, so folgt $\partial_i u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ per Definition. Falls die Konstanten $C(\Omega')$ unabhängig von Ω' gewählt werden können, erhalten wir ein globales Resultat. Sei dazu (Ω_k) eine geschachtelte Ausschöpfung von Ω mit $\Omega_k \Subset \Omega$, d.h.

$$\Omega_k \Subset \Omega, \quad \Omega_k \subset \Omega_{k+1}, \quad \bigcup_k \Omega_k = \Omega.$$

Setze $w_k := \chi_{\Omega_k} |\partial_i u|^p$, wobei

$$\chi_\Lambda(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

die Indikatorfunktion einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ist. Dann ist (w_k) monoton wachsend, konvergiert punktweise gegen $|\partial_i u|^p$, und es gilt $w_k \in L^1(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz

$$\int_\Omega |\partial_i u|^p dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega w_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} |\partial_i u|^p dx \leq C^p,$$

also $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ mit $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. □

Regularität im Inneren

Nun kommen wir zu den Resultaten über die Glattheit der schwachen Lösungen, welche mit Hilfe der Differenzenquotienten bewiesen werden können. Der Beweis des folgenden Satzes ist technisch relativ aufwändig. Der Grundgedanke ist jedoch weiterhin, mittels der Elliptizitätsbedingung an den Differentialoperator L analytische Abschätzungen für die Lösung zu erhalten.

Wir erhalten zunächst Resultate auf kompakt enthaltenen Teilmengen $\Omega' \Subset \Omega$. Daher ist es für diese Ergebnisse nicht relevant, welche Randbedingungen die betrachtete schwache Lösung erfüllt. Zuerst betrachten wir stärkere Annahmen an die Koeffizientenmatrix a und $f \in L^2(\Omega)$. Das ist schon hinreichend für innere H^2 -Regularität:

Satz 3.51: Innere H^2 -Regularität

Sei L gleichmäßig elliptisch und sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega.$$

Für die Koeffizienten und die rechte Seite gelte außerdem:

$$a_{ij} \in C^1(\Omega), \quad b_i, c \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega).$$

Dann ist $u \in H^2(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$, also $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$, und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

wobei die Konstante C jeweils von der Elliptizitätskonstante θ , den Koeffizienten von L und $\Omega' \Subset \Omega$ abhängt.

Beweis. Wir setzen

$$\bar{f} := f - b \cdot \nabla u - cu \in L^2(\Omega),$$

es gilt

$$\|\bar{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right]. \quad (3.35)$$

Da u eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) = \bar{f}$ ist, gilt

$$\int_{\Omega} (a\nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{f} \varphi \, dx, \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega)). \quad (3.36)$$

Der Plan ist nun, mittels geeigneter Wahl der Testfunktion φ in (3.36) und der Elliptizität von L bzw. a eine Abschätzung der Art

$$\int_{\Omega'} |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 \, dx \leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)})$$

für $\Omega' \Subset \Omega$ und $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ zu beweisen. Daraus folgt dann mittels Satz 3.50 die Behauptung. Allerdings wird die Konstante C von Ω' abhängen, so dass wir nur das lokale Resultat $\partial_{ij}^2 u \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ erhalten.

Um die Rechnungen auf $\Omega' \Subset \Omega$ zu lokalisieren, wählen wir eine weitere Menge Λ , so dass $\Omega' \Subset \Lambda \Subset \Omega$ und dazu eine Abschneidefunktion ξ mit

$$\xi \in C_0^\infty(\Lambda) \subset C_0^\infty(\Omega), \quad \xi \equiv 1 \text{ auf } \Omega', \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Die nachfolgenden Rechnungen basieren alle auf Ausdrücken in der Teilmenge $\text{supp } \xi \subset \Lambda \Subset \Omega$, welche einen positiven Abstand von $\partial\Omega$ hat. Dies ist nötig, weil wir keine Information über das Verhalten von u in der Nähe des Randes $\partial\Omega$ haben. Insbesondere wird hierdurch aber eine Abhängigkeit an Ω' in den resultierenden Abschätzungs-Konstanten produziert.

Für $|h| > 0$ klein wählen wir nun die spezielle Testfunktion

$$\varphi := -\Delta_e^{-h}(\xi^2 \Delta_e^h u) \in H_0^1(\Omega)$$

in (3.36). (Es lohnt sich, in der folgenden Rechnung nachzuverfolgen, warum wir ξ^2 statt ξ in φ verwenden!) Es gilt $\text{supp } \varphi \subset \Lambda$, weswegen alle folgenden Integrale auf Λ zurückfallen. Das führt zu folgendem:

Schritt 1: Wir schätzen die linke Seite A in (3.36), mit φ wie eben definiert, nach unten ab. Zunächst, mit (3.33) und (3.32):

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij} \partial_j u \partial_i \varphi \, dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij} \partial_j u \partial_i [\Delta_e^{-h}(\xi^2 \Delta_e^h u)] \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} \Delta_e^h(a_{ij} \partial_j u) \partial_i (\xi^2 \Delta_e^h u) \, dx \end{aligned}$$

Mit (3.31) und der Produktregel expandieren wir beide Ausdrücke im letzten Integral:

$$A = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} \left[a_{ij}(\cdot + eh) \Delta_e^h(\partial_j u) + (\Delta_e^h a_{ij}) \partial_j u \right] \left[\xi^2 \Delta_e^h(\partial_i u) + 2(\Delta_e^h u) \xi \partial_i \xi \right] dx$$

und multiplizieren schlussendlich aus:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij}(\cdot + eh) \Delta_e^h(\partial_j u) \xi^2 \Delta_e^h(\partial_i u) dx + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij}(\cdot + eh) \Delta_e^h(\partial_j u) (\Delta_e^h u) \xi \partial_i \xi dx \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} (\Delta_e^h a_{ij}) (\partial_j u) \Delta_e^h(\partial_i u) \xi^2 dx + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} (\Delta_e^h a_{ij}) (\partial_j u) (\Delta_e^h u) \xi \partial_i \xi dx \end{aligned}$$

Da L als gleichmäßig elliptisch vorausgesetzt wurde, folgt für den ersten Term

$$A_1 := \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij}(\cdot + eh) \Delta_e^h(\partial_j u) \xi^2 \Delta_e^h(\partial_i u) dx \geq \theta \int_{\Lambda} |\xi \Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx.$$

Das geht schon in die Richtung der Abschätzung, die wir haben wollten. Für $A_2 := A - A_1$ erhalten wir über die Cauchy-Schwarz Ungleichung mit der Bedingung $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ und Satz 3.49, sowie den Eigenschaften von ξ eine Abschätzung der Form

$$|A_2| \leq C_{\xi} \int_{\Lambda} \xi \left[|\Delta_e^h(\nabla u)| \left(|\Delta_e^h u| + |\nabla u| \right) + |\nabla u| |\Delta_e^h u| \right] dx.$$

Für das erste Produkt benutzen wir die ε -Young-Ungleichung (3.26), und für das hintere die gewöhnliche ($\varepsilon = 1$). Das ergibt

$$|A_2| \leq \varepsilon \int_{\Lambda} \xi^2 |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx + C_{\xi}(\varepsilon) \int_{\Lambda} \left[|\Delta_e^h u|^2 + |\nabla u|^2 \right] dx.$$

Für $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ können wir nun absorbieren:

$$A = A_1 + A_2 \geq A_1 - |A_2| \geq \frac{\theta}{2} \int_{\Lambda} \xi^2 |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx - C \int_{\Lambda} |\nabla u|^2 dx, \quad (3.37)$$

wobei wir noch einmal Satz 3.49 für den $\Delta_e^h u$ -Ausdruck in der $|A_2|$ -Abschätzung benutzt haben.

Schritt 2: Nun zur rechten Seite B in (3.36). Wieder mit der ε -Young Ungleichung:

$$B := \int_{\Lambda} \bar{f} \varphi dx \leq \varepsilon \int_{\Lambda} |\varphi|^2 dx + C(\varepsilon) \int_{\Lambda} |\bar{f}|^2 dx.$$

Wir setzen φ ein und nutzen Satz 3.49 und (3.33):

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} |\varphi|^2 dx &= \int_{\Lambda} |\Delta_e^{-h}(\xi^2 \Delta_e^h u)|^2 dx \leq \int_{\Lambda} |\nabla[\xi^2 \Delta_e^h u]|^2 dx \\ &= \int_{\Lambda} |2\xi \nabla \xi \Delta_e^h u + \xi^2 \Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx \\ &\leq C_{\xi} \int_{\Lambda} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{\Lambda} \xi^2 |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx. \end{aligned}$$

Es folgt

$$B \leq C_\xi(\varepsilon) \left[\int_\Lambda |\nabla u|^2 dx + \int_\Lambda |\bar{f}|^2 dx \right] + 2\varepsilon \int_\Lambda \xi^2 |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx \quad (3.38)$$

Schritt 3: Die Abschätzungen (3.37) und (3.38) eingesetzt in (3.36), mit der Wahl $\varepsilon = \frac{\theta}{8}$, ergeben

$$\frac{\theta}{4} \int_{\Omega'} |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx \leq \int_\Lambda \xi^2 |\Delta_e^h(\nabla u)|^2 dx \leq C_\xi \left[\int_\Lambda |\nabla u|^2 dx + \int_\Lambda |\bar{f}|^2 dx \right].$$

Mit Satz 3.50 ist jede Ableitung zweiter Ordnung $\partial_{ij}^2 u$ —in $L^2(\Omega')$ —durch die vorige rechte Seite beschränkt und es folgt mit (3.35)

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_\xi \left[\|u\|_{H^1(\Lambda)} + \|\bar{f}\|_{L^2(\Lambda)} \right] \leq C_\xi \left[\|u\|_{H^1(\Lambda)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right]. \quad (3.39)$$

Das funktioniert für jedes $\Omega' \Subset \Omega$, entsprechend $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$.

Schritt 4: Die Abschätzung in (3.39) lässt sich verbessern zu

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right].$$

Dies sieht man wie folgt: Wähle eine neue Abschneidefunktion

$$\eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad \eta \equiv 1 \text{ auf } \Lambda, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Durch Testen mit $\varphi := \eta^2 u$ in (3.36) und Anwendung der ε -Young-Ungleichung schätzen wir ganz ähnlich wie zuvor ab; einerseits ergibt sich in (3.36) mit der neuen Wahl von φ

$$\begin{aligned} \theta \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx &\leq \int_\Omega \eta^2 (a \nabla u) \cdot \nabla u dx = \int_\Omega \left[\eta^2 f u - 2\eta u (a \nabla u) \cdot \nabla \eta - (b \cdot \nabla u) \eta^2 u - c \eta^2 u^2 \right] dx \\ &\leq C_\eta \left[\int_\Omega \eta |u| \left[|\nabla u| + |f| \right] dx + \int_\Omega u^2 dx \right] \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx + C_\eta(\varepsilon) \left[\int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right], \end{aligned}$$

und mit $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$ folgt

$$\frac{\theta}{2} \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq C_\eta \left[\int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right].$$

Andererseits ist

$$\frac{\theta}{2} \int_\Lambda |\nabla u|^2 dx \leq \frac{\theta}{2} \int_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 dx \leq C_\eta \left[\int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \right],$$

also

$$\|u\|_{H^1(\Lambda)} \leq C_\eta \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right].$$

Eingesetzt in (3.39) ergibt sich das gewünschte Resultat. \square

Bemerkung

- (1) Die Abhängigkeit der Konstanten von $\Omega' \Subset \Omega$ in der Abschätzung in Satz 3.51 lässt sich durch Verfolgen im Beweis als proportional zu $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ identifizieren, da im Wesentlichen die Normen der Gradienten der Abschnidefunktionen eingehen.
- (2) Die Bedingungen an die Koeffizienten in Satz 3.51 lassen sich abschwächen. Insbesondere genügt es zu fordern, dass die Koeffizienten a_{ij} Lipschitz-stetig sind.⁹ Wir verweisen z.B. auf Gilbarg & Trudinger (2001).

Das vorige Resultat in Satz 3.51 lässt sich nun induktiv verbessern. Dazu brauchen wir noch eine *Produktregel* für Sobolev-Funktionen, die wir hier kurz in einer für uns passenden Version festhalten. Der Beweis folgt per Approximation durch glatte Funktionen, siehe Satz 3.12.

Lemma 3.52: Produktregel

Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$ und $v \in C_b^k(\Omega)$. Dann gilt $uv \in W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v \quad (|\alpha| \leq k)$$

und

$$\|uv\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \|v\|_{C_b^k(\Omega)}.$$

Satz 3.53: Höhere innere Regularität

Sei L gleichmäßig elliptisch und sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega.$$

Für die Koeffizienten und die rechte Seite gelte außerdem für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_{ij} \in C^{m+1}(\Omega), \quad b_i, c \in C^m(\Omega), \quad f \in H^m(\Omega).$$

Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$, also $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$, und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq C \left[\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

wobei die Konstante C jeweils von m , der Elliptizitätskonstante θ , den Koeffizienten von L und $\Omega' \Subset \Omega$ abhängt.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion über m . Der Fall $m = 0$ folgt nach Satz 3.51.

Schritt 1 (Annahme für m): Nehmen wir an, dass

$$a_{ij} \in C^{m+2}(\Omega), \quad b_i, c \in C^{m+1}(\Omega), \quad f \in H^{m+1}(\Omega),$$

⁹Das kann man auch im vorigen Beweis nachvollziehen: Wir haben nur $\|D_e^h a_{ij}\|_\infty \leq C$ gebraucht, und nicht, dass die Ableitungen von a_{ij} tatsächlich existieren und stetig sind.

und $u \in H^1(\Omega) \cap H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$ auf Ω sei, für die weiterhin

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq C(\Omega') \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (3.40)$$

für jedes $\Omega' \Subset \Omega$ gilt. Wir wollen $u \in H_{\text{loc}}^{m+3}(\Omega)$ und eine entsprechende Abschätzung zu (3.40) mit $\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)}$ zeigen.

Wir betrachten Teilmengen Ω' und Λ mit $\Omega' \Subset \Lambda \Subset \Omega$. Wie im Beweis von Satz 3.51 setzen wir

$$\bar{f} := f - b \cdot \nabla u - cu \in H^{m+1}(\Lambda)$$

und haben dafür die Abschätzung

$$\|\bar{f}\|_{H^{m+1}(\Lambda)} \leq C \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Lambda)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Lambda)} \right),$$

wobei wir für beides die Produktregel aus Lemma 3.52 benutzt haben. (Beachte $b_i, c \in C^{m+1}(\bar{\Lambda})$.)

Schritt 2 ($m \mapsto m + 1$): Sei α ein Multiindex mit $|\alpha| = m + 1$ und setze

$$\varphi := (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \psi \in C_0^\infty(\Lambda) \quad (\psi \in C_0^\infty(\Lambda)).$$

Nach Voraussetzung ist u eine schwache Lösung von $Lu = f$ auf Ω , also

$$\int_{\Omega} (a \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \bar{f} \varphi \, dx.$$

Da $\text{supp } \varphi \Subset \Lambda$, betrachten wir beide Integrale nur auf Λ . Die rechte Seite können wir wegen $\bar{f} \in H^{m+1}(\Lambda)$ partiell integrieren:

$$\int_{\Omega} \bar{f} \varphi \, dx = \int_{\Lambda} (D^\alpha \bar{f}) \psi \, dx.$$

Für die linke Seite gilt, mittels partieller Integration und der Produktregel aus Lemma 3.52:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij} \partial_j u \partial_i \varphi \, dx &= (-1)^{|\alpha|} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} a_{ij} \partial_j u \partial_i (D^\alpha \psi) \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} D^\alpha (a_{ij} \partial_j u) \partial_i \psi \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} \left[a_{ij} (D^\alpha \partial_j u) \partial_i \psi + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha, \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a_{ij} (D^\beta \partial_j u) \partial_i \psi \right] dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Lambda} \left[a_{ij} \partial_i (D^\alpha u) \partial_i \psi + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha, \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a_{ij} (D^\beta \partial_j u) \partial_i \psi \right] dx \end{aligned}$$

Daraus lesen wir

$$\int_{\Lambda} (a \nabla D^\alpha u) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Lambda} F \psi \, dx \quad (\psi \in C_0^\infty(\Lambda))$$

mit

$$F := D^\alpha \bar{f} + \sum_{i,j=1}^n \sum_{\substack{\beta \leq \alpha, \\ \beta \neq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \partial_i [D^{\alpha-\beta} a_{ij} (D^\beta \partial_j u)].$$

Folglich ist $D^\alpha u \in H^1(\Lambda)$ eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = F$ auf Λ . Wegen der Voraussetzungen an die Koeffizienten gilt $F \in L^2(\Omega)$ mit

$$\|F\|_{L^2(\Lambda)} \leq C \left(\|\bar{f}\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Lambda)} \right).$$

Durch Anwendung von Satz 3.51 erhalten wir nun $D^\alpha u \in H_{\text{loc}}^2(\Lambda)$ mit der Abschätzung

$$\|D^\alpha u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left(\|F\|_{L^2(\Lambda)} + \|D^\alpha u\|_{L^2(\Lambda)} \right).$$

Mittels der Abschätzungen für F und \bar{f} folgt weiter

$$\|D^\alpha u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left(\|\bar{f}\|_{H^{m+1}(\Lambda)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Lambda)} \right) \leq C \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Lambda)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Lambda)} \right),$$

und schließlich, mit der Induktionsannahme (3.40) für Λ ,

$$\|D^\alpha u\|_{H^2(\Omega')} \leq C(\Lambda) \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Da diese Abschätzung für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = m + 1$ funktioniert, ergibt sich

$$\|u\|_{H^3(\Omega')} \leq C(\Lambda) \left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

und das ist der Induktionsschritt. □

Mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes (Satz 3.32 bzw. Korollar 3.33) erhalten wir dann sofort:

Korollar 3.54: Unendliche Differenzierbarkeit im Inneren

Sei L gleichmäßig elliptisch und sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega.$$

Für die Koeffizienten und die rechte Seite gelte außerdem

$$a_{ij}, b_i, c \in C^\infty(\Omega), \quad f \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega).$$

Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$.

Das schwache Lösungskonzept reproduziert also glatte Lösungen im Inneren des Gebietes, sobald die gegebenen Daten ebenfalls glatt sind. Dabei haben wir im Wesentlichen nur immer wieder die schwache Formulierung und die strukturell sehr starke Annahme der Elliptizität ausgenutzt, und partiell integriert. (Die vorigen Beweistechniken zeigen auch die Nützlichkeit

und Mächtigkeit variationeller Formulierungen: Für *alle* Funktionen gilt . . .) Beachte nochmals, dass wir—außer in Korollar 3.54—keine Annahmen an den Rand $\partial\Omega$ gemacht haben, weder im Sinne von Randregularität noch an Randwerte der betrachteten schwachen Lösungen.

Die bisherigen Abschätzungen in den Sätzen 3.51 und 3.53 hatten immer noch den $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ Term auf der rechten Seite. Das liegt daran, dass wir nicht angenommen haben, dass die gegebene schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ eindeutig ist.

Weiß man bereits, dass u tatsächlich die *eindeutige* schwache Lösung von $Lu = f$ ist, so erhält man eine Abschätzung ohne den L^2 -Term:

Lemma 3.55

Sei L gleichmäßig elliptisch, sei $\partial\Omega$ Lipschitz-Rand, und sei $u \in H^1(\Omega)$ die *eindeutige* schwache Lösung von

$$Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega$$

für $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante C , die nicht von f abhängt, so dass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Falls $u \in H_0^1(\Omega)$, kann auf die Lipschitz-Rand Annahme verzichtet werden.

Der Beweis folgt mittels des Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatzes 3.35, siehe die Übungen.

Globale Regularität

Unter geeigneten Annahmen lassen sich die Ergebnisse zur inneren Regularität auch auf globale Regularität erweitern. Dies ist allerdings nochmals wesentlich aufwändiger, so dass wir das allgemeine Resultat hier nur festhalten, aber nicht beweisen.

Satz 3.56: Globale Regularität

Sei L gleichmäßig elliptisch und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten und die rechte Seite gelte außerdem für ein $m \in \mathbb{N}$:

$$a_{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega}), \quad b_i, c \in C^m(\overline{\Omega}), \quad f \in H^m(\Omega).$$

Sei weiterhin $\partial\Omega$ ein C^{m+2} -Rand. Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right],$$

wobei die Konstante C von m , der Elliptizitätskonstante θ , den Koeffizienten von L und dem Gebiet Ω abhängt.

Auch hier gilt, falls $u \in H_0^1(\Omega)$ die *eindeutige* schwache Lösung des Dirichlet-Problems ist, so gilt die Abschätzung für die Lösung in Satz 3.56 auch ohne den Summanden $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, siehe Lemma 3.55.

Wie bei der inneren Regularität liefern die Sobolev-Einbettungssätze auch glatte Lösungen bei entsprechenden Daten:

Korollar 3.57: Globale unendliche Differenzierbarkeit

Sei L gleichmäßig elliptisch und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten und die rechte Seite gelte außerdem

$$a_{ij}, b_i, c, f \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

und $\partial\Omega$ sei ein C^∞ -Rand. Dann ist $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

4 Fixpunktmethoden für nichtlineare elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Eines der wichtigsten Instrumente bei der Behandlung nichtlinearer Probleme mit Methoden der Funktionalanalysis sind *Fixpunktsätze*.

Definition 4.1: Fixpunkt

Sei X ein Banachraum und $T: M \subseteq X \rightarrow X$ eine Abbildung. Ein Punkt $x \in M$ mit $Tx = x$ heißt *Fixpunkt* von T .

Die grundlegende Technik ist immer gleich. Angenommen, wir können Probleme der Form

$$A(u) = f$$

“gut” lösen, zum Beispiel im Sinne, dass ein wohldefinierter Lösungsoperator $Y \ni f \mapsto u \in X$ zwischen geeigneten Banachräumen Y und X existiert. Wir sind nun interessiert an Lösungen des Problems

$$A(u) = F(u).$$

Eine schon aus früheren Vorlesungen zu z.B. gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannte Idee wäre es, die folgende Reformulierung zu betrachten: Wenn F hinreichend gut $X \rightarrow Y$ operiert, so betrachte für $v \in X$ die Abbildung $T: v \mapsto u$, so dass $u \in X$ die Lösung von

$$A(u) = F(v)$$

ist. Dann ist u genau dann die gesuchte Lösung des obigen Problems, wenn $T(u) = u$ gilt, also, wenn u ein Fixpunkt von T ist. (Aus Knappheitsgründen schreiben wir, wie in der vorhergegangenen Definition, auch oft Tu statt $T(u)$.)

Im folgenden Abschnitt studieren wir die Anwendbarkeit von Fixpunktsätzen zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen für den speziellen Fall eines elliptischen Differentialoperators zweiter Ordnung. In obiger Notation ist also

$$A(u) := Lu = -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu.$$

In diesem Fall ist also der gegebene Operator, für den bereits geeignete Theorie existiert, selbst linear; das muss für obiges Fixpunktprogramm aber nicht unbedingt der Fall sein.

Die genauen Ausgestaltungen der bislang nicht klar definierten genaueren Anforderungen an die involvierten Funktionen hängen von den verschiedenen Fixpunktsätzen ab. Einer der bekanntesten Fixpunktsätze ist der *Banachsche Fixpunktsatz*. Mit dessen Hilfe kann zum Beispiel der Satz von Picard-Lindelöf bewiesen werden, der eine eindeutige Lösung bestimmter

gewöhnlicher DGLen sichert. Im Gegensatz zu anderen Fixpunktsätzen liefert der Fixpunktsatz von Banach auch die Eindeutigkeit des Fixpunktes; die Annahmen sind allerdings auch stark. Klassische Einsatzgebiete dieses Satzes sind Probleme, bei denen sich die Nichtlinearität als geeignete Störung eines dominanteren Operators interpretieren lässt.

Darüber hinaus studieren wir den *Fixpunktsatz von Schauder*. Dies ist ein Satz aus der Topologie, der mit Hilfe des *Fixpunktsatzes von Brouwer* bewiesen wird. Aus ihm kann man unter anderem den Satz von Peano herleiten, der ebenfalls die Existenz einer Lösung einer gewöhnlichen DGL sichert; der Satz macht keine Eindeutigkeits-Aussage. Es lässt sich eine anwendungsreiche Version des Satzes für nichtlineare und in geeignetem Sinne kompakte Operatoren formulieren, welche eine zentrale Rolle in der nichtlinearen Funktionalanalysis spielt. Außerdem studieren wir als Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes den *Fixpunktsatz von Schaefer/Satz von Leray-Schauder*, welcher in den Anwendungen für nichtlineare partielle DGLen oft besonders nützlich ist.

Die folgenden Beispiele illustrieren, wie die Behandlung diverser nichtlinearer Probleme auf die Lösung von Fixpunktproblemen zurückgeführt wird:

Beispiel

- (i) Nullstellenbestimmung nichtlinearer Funktionen:

$$F(x) = 0.$$

Diese Gleichung kann auf verschiedene Arten als ein Fixpunktproblem für einen Operator T umformuliert werden:

$$\begin{aligned} Tx &:= x - F(x) && \text{(einfachste Methode),} \\ Tx &:= x - \omega F(x) && \text{(lineare Relaxation mit } \omega > 0), \\ Tx &:= x - [F'(x)]^{-1} F(x) && \text{(Newton-Verfahren).} \end{aligned}$$

Umgekehrt formuliert man Fixpunktprobleme auch oft in Nullstellenprobleme um, um das Newton-Verfahren zur numerischen Berechnung heranziehen zu können.

- (ii) Gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Für eine gegebene stetige Funktion $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ ist dieses Anfangswertproblem äquivalent zur Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Dieses ist wiederum äquivalent zum Fixpunktproblem für den folgenden Operator $T: X \rightarrow X$:

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

(iii) Nichtlineare partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene nichtlineare Funktion ist und die Funktion u gesucht wird. Dieses Problem schreiben wir mit Hilfe von

$$Tu = (-\Delta)^{-1}(f(u))$$

in ein Fixpunktproblem um, wobei $(-\Delta)^{-1}$ zum Beispiel im Sinne eines schwachen Lösungsoperators $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, wie in Abschnitt 3.4 etabliert, zu verstehen ist.

In den obigen Beispielen wurden zunächst keine Eigenschaften der Lösungen und Nichtlinearitäten (wie z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) spezifiziert. Geeignete Kombinationen aus den Annahmen bzw. Eigenschaften im Problem und passenden Funktionenräumen zu identifizieren, in denen wir die Fixpunktformulierung aufsetzen und nach Lösungen suchen, ist eine der Hauptaufgaben bei der Anwendung von Fixpunktsätzen, und allgemein der Lösung nichtlinearer Probleme.

4.1 Banachscher Fixpunktsatz

Strategie: Finde einen Fixpunkt einer Abbildung T als Grenzwert der Iteration $x_{n+1} = Tx_n$.

Satz 4.2: Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein Banachraum, sei $M \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge, und sei $T: M \subset X \rightarrow M$ eine Kontraktion, d.h. für ein $q < 1$ gelte

$$\|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\| \quad (x, y \in M).$$

Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in M$ und die durch $x_{n+1} := Tx_n$ definierte Folge (x_n) konvergiert für jedes $x_0 \in M$ gegen \bar{x} .

Beweis. Ohne Einschränkung sei $M = X$, denn $(M, \|\cdot\|_X)$ ist ebenfalls ein Banachraum, da $M \subseteq X$ als nichtleer und abgeschlossen im Banachraum X angenommen war.

Eindeutigkeit: Für zwei Fixpunkte $x \neq y$ liefert die Kontraktionseigenschaft

$$\|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\| < \|x - y\| \quad \text{!} \quad \implies \quad x = y.$$

Existenz: Sei $x_0 \in X$ beliebig. Wir betrachten die iterierte Folge $x_{n+1} = Tx_n$. Nach Voraussetzung ist

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leq q\|x_n - x_{n-1}\|$$

und Induktion liefert

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|.$$

Zusammen mit der Dreiecks-Ungleichung folgt für beliebige $m \geq 0$ mittels Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \sum_{\ell=0}^{m-1} \|x_{n+\ell+1} - x_{n+\ell}\| \\ &\leq \sum_{\ell=0}^{m-1} q^{n+\ell} \|x_1 - x_0\| \\ &= q^n \frac{1 - q^m}{1 - q} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Somit ist (x_n) eine Cauchy-Folge im Banachraum X und besitzt folglich einen Grenzwert \bar{x} . Die Abbildung T ist als Kontraktion global Lipschitz-stetig und es folgt

$$T\bar{x} = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x}. \quad \square$$

Der Banachsche Fixpunktsatz verwendet mit der Kontraktionseigenschaft eine starke Voraussetzung an T . Andererseits ist die Aussage sehr stark: der Satz gilt in beliebigen Banachräumen (sogar in allgemeinen vollständigen metrischen Räumen), und es wird keine weitere strukturelle Eigenschaft wie Konvexität oder ähnliches benötigt.

Man kann auch leicht explizite Fehlerabschätzungen für die Iterationsfolge angeben:

$$\begin{aligned} \|x_n - \bar{x}\| &\leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\| && \text{(a-priori Abschätzung)} \\ \|x_{n+1} - \bar{x}\| &\leq \frac{q}{1 - q} \|x_{n+1} - x_n\| && \text{(a-posteriori Fehler-Abschätzung)} \\ \|x_{n+1} - \bar{x}\| &\leq q \|x_n - \bar{x}\| && \text{(lineare Konvergenzrate)} \end{aligned}$$

Die folgenden Gegenbeispiele zeigen zudem, dass keine der nichttrivialen Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes weggelassen werden kann:

- $M = (0, 1)$, $Tx = \frac{x}{2}$: M ist nicht abgeschlossen, T besitzt keinen Fixpunkt in M .
- $M = \mathbb{R}$, $Tx = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$: Für die Ableitung von T gilt

$$T'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x^2},$$

und somit folgt nach dem Mittelwertsatz für ein $\xi \in (x, y)$:

$$|Tx - Ty| = \left| 1 - \frac{1}{1 + \xi^2} \right| |x - y|.$$

Damit ist T kontraktiv, aber nicht q -kontraktiv (wieso?), und T hat in \mathbb{R} auch keinen Fixpunkt.

Beispiel 4.3: Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit hinreichend kleiner Lipschitz-Konstante $L < C_P^{-1}$, wobei C_P die Konstante aus der Poincaré-Friedrichs Ungleichung (Satz 3.28) für Ω und $p = 2$ sei. Dann hat das semi-

lineare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) &= f(x) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Mit einem C^2 -Rand $\partial\Omega$ gilt ferner $u \in H^2(\Omega)$.

Beweis. Wir schreiben die Gleichung in eine lineare Gleichung mit neuer rechter Seite, parametrisiert durch $v \in H_0^1(\Omega)$, um:

$$-\Delta u = f - b(\nabla v). \quad (4.2)$$

und betrachten den assoziierten Lösungsoperator

$$T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad v \mapsto u = \boxed{T(v) := (-\Delta)^{-1}(f - b(\nabla v))}.$$

Zunächst müssen wir zeigen, dass T wohldefiniert ist, d.h. zu gegebenem $v \in H_0^1(\Omega)$ gibt es eine eindeutige Lösung $u = Tv \in H_0^1(\Omega)$ von (4.2). Besitzt T einen Fixpunkt mit $Tu = u$, so ist dieser Lösung der nichtlinearen Gleichung.

T ist wohldefiniert: Sei $v \in H_0^1(\Omega)$. Da b Lipschitz-stetig ist, folgt $b(\nabla v) \in F \in L^2(\Omega)$. Dazu beobachten wir zunächst, wobei L die Lipschitzkonstante von b bezeichnet:

$$|b(y)| \leq |b(y) - b(0)| + |b(0)| \leq M|y| + |b(0)| \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Also ergibt sich

$$\int_{\Omega} |b(\nabla v(x))|^2 dx \leq 2|b(0)|^2|\Omega| + 2L^2 \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

und damit $b(\nabla v) \in L^2(\Omega)$, da $\nabla v \in L^2(\Omega)$, was auch $f - b(\nabla v) \in L^2(\Omega)$ impliziert. Nach Satz 3.43 hat die lineare Gleichung (4.2) also eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, und T ist wohldefiniert.

T ist q -Kontraktion: Um den Fixpunktsatz von Banach anwenden zu können benötigen wir die q -Kontraktivität von T . Wir wählen dazu als Norm $|u|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, siehe die Poincaré-Friedrichs Ungleichung (Satz 3.28).

Nach Konstruktion erfüllt $u = Tv$ die schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (f - b(\nabla v))\varphi dx \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega)). \quad (4.3)$$

Seien $u_1 = Tv_1$ und $u_2 = Tv_2$. Wir setzen $\varphi = u_1 - u_2$ in die jeweiligen schwachen Formulierungen (4.3) ein und ziehen diese voneinander ab. Das ergibt:

$$|u_1 - u_2|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = - \int_{\Omega} (b(\nabla v_1) - b(\nabla v_2))(u_1 - u_2) dx,$$

und weiter mit der Lipschitz-Eigenschaft von b und der Poincaré-Friedrichs Ungleichung:

$$\begin{aligned} |u_1 - u_2|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|b(\nabla v_1) - b(\nabla v_2)\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq L |v_1 - v_2|_{H_0^1(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_P L |v_1 - v_2|_{H_0^1(\Omega)} |u_1 - u_2|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Also ist T Lipschitz-stetig mit Konstante $C_P L$. Falls $L < C_P^{-1}$, ist T eine q -Kontraktion mit $q = C_P L < 1$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz 4.2 hat T also einen eindeutigen Fixpunkt $u \in H_0^1(\Omega)$, der dann das semilineare Anfangswertproblem (4.1) eindeutig löst.

Die H^2 -Regularität von u , falls $\partial\Omega$ ein C^2 -Rand ist, folgt aus dem globalen Regularitäts-Satz 3.56 und der Beobachtung, dass weiterhin $f - b(\nabla u) \in L^2(\Omega)$ gilt. \square

Da es einen Zusammenhang zwischen der optimalen Konstante in der Poincaré-Friedrichs Ungleichung und dem minimalen Eigenwert von $-\Delta$ gibt (vgl. Übung), lässt sich die Bedingung $L < C_P^{-1}$ im vorigen Beispiel auch im Sinne einer hinreichend kleinen Störung $b(\nabla u)$ des dominanten Differentialoperators $-\Delta u$ interpretieren.

Zum Beispiel dürfte man—ohne direkten Anwendungsbezug—die Nichtlinearität $b(y) := \frac{1}{2C_P}|y|$ wählen.

Achtung: Im letzten Beweis war die Wahl der Norm auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$, bezüglich derer die Fixpunktabbildung eine Kontraktion sein soll, durchaus wesentlich für die resultierende Bedingung $L < C_P^{-1}$. Hier ist also Vorsicht geboten. Zur Erinnerung: Auch im Beweis des Picard-Lindelöf Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen wird üblicherweise eine clevere *Renormierung* mit einer äquivalenten Norm vorgenommen, um eine Kontraktion zu erzeugen.

Solche Techniken finden sich häufig bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, da äquivalente Normen zwar andere Konstanten erzeugen, aber nichts an der Zugehörigkeit zum renormierten Funktionenraum ändern, was oft schon die halbe Miete ist.

4.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Der wohl einfachste Fixpunktsatz ist das folgende, aus der reellen Analysis bekannte Resultat:

Eine stetige Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ hat mindestens einen Fixpunkt \bar{x} .

Beweis. Setze $g(x) := f(x) - x$. Dann ist $g(-1) \geq 0$ und $g(1) \leq 0$. Da g stetig ist, existiert eine Nullstelle \bar{x} in $[-1, 1]$. (Nullstellensatz von Bolzano!) \square

Tatsächlich gilt ein analoges Resultat in beliebigen endlich-dimensionalen Räumen. Dieses ist an vielen Stellen der Analysis und verwandter Teilgebiete wie der Topologie von zentraler Bedeutung.

Satz 4.4: Fixpunktsatz von Brouwer

Sei $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene n -dimensionale Einheitskugel. Jede stetige Abbildung $T: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Der Beweis in höheren Dimensionen $n > 1$ ist schwierig und erfordert tiefere topologische Kenntnisse und Resultate. Ein relativ elementarer Beweis findet sich z.B. in (Evans, 1998, Abschnitt 8.4.1). Der Fixpunktsatz von Brouwer gilt **nicht** in unendlichdimensionalen Räumen. Der tieferliegende Grund hierfür (und für viele andere unerfreuliche Sachverhalte) ist, dass abgeschlossene Kugeln in unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht kompakt sind.

Beispiel 4.5

Wir betrachten den unendlich-dimensionalen Banachraum

$$X = \ell^2(\mathbb{N}_0) := \left\{ x = (x_0, x_1, x_2, \dots) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Für dessen abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}_0) : \|x\|_2 \leq 1\}$ sei die Abbildung $T: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ definiert durch

$$T(x) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_0, x_1, x_2, \dots \right) \quad (x \in \overline{B_1(0)}).$$

Offensichtlich gilt

$$\|T(x)\|_2^2 = (1 - \|x\|_2^2) + \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = 1, \quad (4.4)$$

also ist T wohldefiniert und eine Selbstabbildung von $\overline{B_1(0)}$ in sich selbst. (Tatsächlich ist $\text{Bild } T \subseteq \partial \overline{B_1(0)}$.) Außerdem ist T stetig: Sei $(x_k) \subset \ell^2(\mathbb{N}_0)$ eine Folge mit $x_k \rightarrow x$ in $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist

$$\|T(x_k) - T(x)\|_2^2 = \left(\sqrt{1 - \|x_k\|_2^2} - \sqrt{1 - \|x\|_2^2} \right)^2 + \|x_k - x\|_2^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

da $\|x_k\|_2 \rightarrow \|x\|_2$. Die Abbildung T hat aber keinen Fixpunkt: Ein Fixpunkt $x = T(x) \in \overline{B_1(0)}$ müsste wegen (4.4) $\|x\|_2 = \|Tx\|_2 = 1$ erfüllen. Aber dann folgt iterativ

$$x_0 = T(x)_0 = \sqrt{1 - \|x\|_2^2} = 0, \quad x_1 = T(x)_1 = x_0 = 0, \quad x_2 = T(x)_2 = x_1 = 0, \quad \dots$$

also $x = Tx = 0$. Aber das ist natürlich ein Widerspruch zu $\|x\|_2 = 1$. Also kann es keinen Fixpunkt von T geben.

Der Fixpunktsatz von Brouwer lässt sich auf beliebige endlichdimensionale Banachräume verallgemeinern, und für Mengen M , die homöomorph zur Einheitskugel sind. Dies sind z.B. alle nichtleeren konvexen und kompakten Mengen des \mathbb{R}^n .

Satz 4.6: Fixpunktsatz von Brouwer, allgemeine Version

Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum und $M \subset X$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge. Die Abbildung $T: M \rightarrow M$ sei stetig. Dann hat T einen Fixpunkt.

Auch hier kann keine der nichttrivialen Voraussetzungen weggelassen werden:

- $M = \mathbb{R}$, $T(x) = x + 1$: M ist nicht beschränkt und T hat keinen Fixpunkt.
- $M = [-2, -1] \cup [1, 2]$ und $T(x) = -x$: M ist nicht konvex und T hat keinen Fixpunkt.
- $M = [0, 1]$, $T(0) = 1$ und $T(x) = 0$ für $x \neq 0$: T ist nicht stetig und hat keinen Fixpunkt.

Im Vergleich zum Banachschen Fixpunktsatz hat der Fixpunktsatz von Brouwer den Vorteil, dass die (starke) Kontraktionseigenschaft von T nicht benötigt wird. Diese wird ersetzt durch Eigenschaften der Menge M , zusätzlich muss die Raumdimension endlich sein, was selbst natürlich eine massive Einschränkung darstellt. Dennoch ist der Fixpunktsatz von Brouwer von großer Bedeutung, da der Fixpunktsatz von Schauder auf ihm aufbaut.

4.3 Fixpunktsatz von Schauder

In unendlichdimensionalen Räumen X gilt der Satz von Brouwer in seiner allgemeinen Formulierung wie in Satz 4.6 genauso, und heißt dann Fixpunktsatz von Schauder:

Satz 4.7: Fixpunktsatz von Schauder, Version 1

Sei X ein Banachraum, und $M \subset X$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge. Die Abbildung $T: M \subset X \rightarrow M$ sei stetig. Dann hat T einen Fixpunkt.

Achtung: Wir haben in Beispiel 4.5 gesehen, dass die vorige Aussage nicht für die abgeschlossene Einheitskugel in einem unendlichdimensionalen Banachraum gilt. Das liegt daran, dass diese—wie bereits erwähnt—**nicht kompakt** ist. Die Implikation

$$\text{“beschränkt + abgeschlossen} \implies \text{ kompakt”}$$

ist **falsch** in unendlichdimensionalen Vektorräumen! Das ist tatsächlich der vermutlich grundlegendste Grund, weshalb die Arbeit mit unendlichdimensionalen Vektorräumen wesentlich anspruchsvoller ist als mit endlichdimensionalen.

In diesem Sinne lesen sich die Aussagen der Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder zwar gleich, die Kompaktheits-Annahme in der Schauder-Version ist allerdings *wesentlich restriktiver*, da in unendlichdimensionalen Vektorräumen kompakte Mengen sehr viel seltener sind als in endlichdimensionalen, was die Quelle vieler Probleme und Umwege ist.

Beweis von Satz 4.7. Wir nutzen den Fixpunktsatz von Brouwer. Dazu werden wir T durch stetige Operatoren mit endlichdimensionalem Bild approximieren. Diese Konstruktion ist unabhängig vom Fixpunkt-Kontext.

Wir zeigen zunächst, dass es zu $\varepsilon > 0$ einen endlichdimensionalen Unterraum L_ε von X und eine stetige Abbildung $T_\varepsilon: M \rightarrow M \cap L_\varepsilon$ gibt, so dass

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon \quad (x \in M)$$

gilt. Dies sieht man wie folgt:

Konstruktion L_ε : Als stetige Funktion ist T auf der kompakten Menge M gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \|x - y\| \leq \delta \implies \|Tx - Ty\| \leq \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben und setze $\delta = \delta(\varepsilon)$ aus der vorigen Feststellung. Da M kompakt ist, existiert eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_N\} \subset M$, so dass

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x_i). \quad (4.5)$$

(Wie genau?) Der Vektorraum

$$L_\varepsilon := \text{span}\{Tx_i : i = 1, \dots, N\}$$

ist per Konstruktion endlichdimensional. Folglich ist $M \cap L_\varepsilon$ nichtleer, kompakt, konvex und endlichdimensional.

Konstruktion T_ε : Wir definieren stetige Funktionen $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ für $i = 1, \dots, N$ durch

$$\psi_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \|x - x_i\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_i\|}{\delta} & \text{falls } \|x - x_i\| < \delta. \end{cases}$$

(Skizze!) Dann ist $\text{supp } \psi_i \subset \overline{B_\delta(x_i)}$ und da M kompakt ist, existiert ein $c > 0$, so dass

$$\sum_{i=1}^N \psi_i(x) \geq c > 0 \quad (x \in M).$$

Mit Hilfe einer zugehörigen (stetigen) Zerlegung der Eins zur Überdeckung (4.5) von M ,

$$\phi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^N \psi_j(x)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(x) = 1 \quad (x \in M),$$

definieren wir eine geeignete Approximation von T auf K :

$$T_\varepsilon x := \sum_{i=1}^N \phi_i(x) Tx_i \quad (x \in M).$$

(Idee: $T_\varepsilon x$ ist ein gewichtetes Mittel von Tx_i , über $i = 1, \dots, N$.)

Nach Definition ist T_ε stetig auf M mit Werten in $M \cap L_\varepsilon$. Für $x \in M$ folgt weiter wegen $\text{supp } \phi_i \subseteq B_\delta(x_i)$ und der Konstruktion:

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| = \left\| \sum_{i=1}^N \phi_i(x) [Tx_i - Tx] \right\| \leq \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \|Tx_i - Tx\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \phi_i(x) = \varepsilon.$$

Approximation: Wir betrachten eine Folge $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz 4.6 folgt, dass jede Abbildung

$$T_{\varepsilon_n} : L_{\varepsilon_n} \cap M \rightarrow L_{\varepsilon_n} \cap M$$

einen Fixpunkt $x_n \in M$ hat. Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$ von (x_n) mit Grenzwert x^* in M . Aber dann folgt

$$\|Tx^* - x^*\| \leq \underbrace{\|Tx^* - Tx_{n_j}\|}_{\xrightarrow{T \text{ stetig}} 0} + \underbrace{\|Tx_{n_j} - T_{\varepsilon_{n_j}}x_{n_j}\|}_{\leq \varepsilon_{n_j}} + \underbrace{\|T_{\varepsilon_{n_j}}x_{n_j} - x^*\|}_{= x_{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

also ist x^* ein Fixpunkt von T . □

Im vorigen Satz 4.7 haben wir verlangt, dass T auf einer kompakten Menge K operiert. Das kann man oft umgehen; eine alternative Version des Schauderschen Fixpunktsatzes ist die Folgende:

Satz 4.8: Fixpunktsatz von Schauder, Version 2

Sei X ein Banachraum, und $M \subset X$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Die Abbildung $T: M \subset X \rightarrow M$ sei stetig, und $T(M)$ sei relativ kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt.

Diese Version baut auf dem folgenden Lemma auf, das auch für sich selbst eine schöne Aussage ist:

Lemma 4.9: Lemma von Mazur

Sei X ein Banachraum und $M \subset X$ relativ kompakt. Dann ist die *konvexe Hülle* von M

$$\text{conv}(M) := \left\{ y \in X : \exists m \in \mathbb{N} : y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \text{ für } y_i \in M, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}$$

ebenfalls relativ kompakt.

Man zeigt leicht, dass die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ die kleinste konvexe Menge ist, die M beinhaltet.

Beweis von Satz 4.8. Da M konvex ist, folgt aus $T(M) \subseteq M$ auch $\text{conv}(T(M)) \subseteq M$, und analog auch

$$\overline{\text{conv}(T(M))} \subseteq M.$$

Die Einschränkung von T auf $\overline{\text{conv}(T(M))}$ ist also wohldefiniert. Weiterhin gilt

$$T(\overline{\text{conv}(T(M))}) \subseteq T(M) \subseteq \overline{\text{conv}(T(M))},$$

also bildet

$$T: \overline{\text{conv}(T(M))} \rightarrow \overline{\text{conv}(T(M))}$$

ab. Mit dem Lemma von Mazur folgt, dass $\overline{\text{conv}(T(M))}$ kompakt ist, zudem nichtleer und konvex. (Wieso?) Also folgt mit der ersten Version der Fixpunktsatzes von Schauder, Satz 4.7, dass T einen Fixpunkt in $\text{conv}(T(M)) \subseteq M$ hat. □

In Anwendungen für nichtlineare Probleme werden die beiden vorigen Versionen des Schauder-schen Fixpunktsatzes wie folgt benutzt: Zunächst wird das Problem als Fixpunktproblem für eine Abbildung T umformuliert. Dann wählt man einen geeigneten Raum X , in dem T stetig ist, und eine abgeschlossene konvexe Menge M , so dass $T: M \rightarrow M$ abbildet. Dabei ist entweder M kompakt oder $T(M)$ relativ kompakt. Die Kombination aus $T: M \rightarrow M$ (Selbstabbildung) und der Kompaktheit ist die Schwierigkeit.

Beachte: Für die relative Kompaktheit von $T(M)$ reicht es, zu zeigen, dass jede Folge $(x_n) \subset M$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ besitzt, so dass $T(x_{n_k})$ in X konvergiert; insbesondere muss hierbei *nicht* gezeigt werden, dass die Teilfolge (x_{n_k}) selbst konvergiert.

Wir zeigen nun eine Beispiel-Anwendung für den Schauder-Fixpunktsatz. Dazu nutzen wir folgenden Begriff:

Definition 4.10: Carathéodory-Funktion

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $f: U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f *Carathéodory-Funktion*, wenn gilt:

- (i) Die Abbildung $x \mapsto f(x, y)$ ist messbar $U \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^m$, und
- (ii) für fast alle $x \in U$ ist $y \mapsto f(x, y)$ stetig $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Carathéodory-Eigenschaft stellt sicher, dass die Funktion $x \mapsto f(x, u(x))$ wieder messbar $U \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wenn u z.B. aus einem $L^p(U)$ -Raum mit $1 \leq p < \infty$ stammt.

Basierend auf dieser Beobachtung induzieren Carathéodory-Funktionen Abbildungen sogenannte *Nemyckii-Operatoren* ("Einsetzungsoperatoren") zwischen Funktionenräumen. Solche Operatoren treten in nichtlinearen Problemen in natürlicher Weise auf. In den Übungen zeigen wir folgendes Resultat für die Lebesgue-Räume:

Lemma 4.11: Nemyckii Operatoren zwischen Lebesgue-Räumen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei f eine Carathéodory-Funktion mit

$$|f(x, y)| \leq C|y|^r + h(x) \quad (y \in \mathbb{R}^m, \text{ f.a. } x \in \Omega),$$

wobei $C \geq 0$ und $0 \leq h \in L^{p/r}(\Omega)$. Dann ist für $\max(1, r) \leq p < \infty$ die Abbildung

$$u \mapsto f(\cdot, u(\cdot)): L^p(\Omega)^m \rightarrow L^{p/r}(\Omega)$$

wohldefiniert und stetig, und es gilt, mit einer weiteren Konstanten $C' \geq 0$,

$$\|f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{p/r}(\Omega)} \leq C' \left[\|u\|_{L^p(\Omega)^m}^r + \|h\|_{L^{p/r}(\Omega)} \right].$$

Beispiel 4.12: Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Carathéodory-Funktion. Zudem gelte die Wachstumsbedingung

$$|f(x, y)| \leq h(x) \quad (\text{f.a. } x \in \Omega, y \in \mathbb{R}),$$

wobei $h \in L^{q'}(\Omega)$ mit $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$1 \leq q \leq \infty \quad \text{falls } n = 1, \quad 1 \leq q < \infty \quad \text{falls } n = 2, \quad 1 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} \quad \text{falls } n \geq 3.$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(\cdot, u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.6}$$

eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|h\|_{L^{q'}(\Omega)}.$$

Beweis. Nach Definition ist $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (4.6), wenn

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x, u(x)) \varphi(x) \, dx \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega)) \tag{4.7}$$

gilt. Die rechte Seite der Gleichung ist wegen der Wachstumsbedingung an f wohldefiniert und induziert ein Funktional auf $H_0^1(\Omega)$, also in $H^{-1}(\Omega)$. Das machen wir uns zunächst klar.

Mit den Sobolev-Einbettungssätzen 3.27 und 3.32 und der Wahl von q gilt genau

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Also induziert jedes $g \in L^{q'}(\Omega)$ ein stetiges Funktional auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\int_{\Omega} g \varphi \, dx \leq \|g\|_{L^{q'}(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C_E \|g\|_{L^{q'}(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega))$$

mit der Einbettungskonstante C_E , der Norm der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, wobei wir in diesem Beispiel $H_0^1(\Omega)$ wieder mit der Gradientennorm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}$ betrachten. (Das wird später noch relevant.) Insbesondere

$$\|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_E \|g\|_{L^{q'}(\Omega)}, \quad L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Da $|f(x, u(x))| \leq h(x)$ mit $h \in L^{q'}(\Omega)$ für fast alle $x \in \Omega$, folgt $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{q'}(\Omega)$ und

$$\|f(\cdot, u(\cdot))\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_E \|h\|_{L^{q'}(\Omega)} \tag{4.8}$$

für jedes $u \in H_0^1(\Omega)$. Damit ist die rechte Seite in (4.7) wohldefiniert und fällt in die Klasse $H^{-1}(\Omega)$, die wir mit der Theorie aus Abschnitt 3.4 behandeln können.

Wir konstruieren nun die Fixpunktabbildung T und die Grundmenge M , um den Fixpunktsatz von Schauder, Satz 4.8, auf (4.6) anzuwenden.

Sei

$$M := \left\{ v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq N \right\},$$

wobei wir $N > 0$ später festlegen. Dann ist M eine kompakte und konvexe Teilmenge von $X := L^2(\Omega)$ (!): Konvexität ist wegen der Dreiecksungleichung klar. Weiterhin ist M per

Definition beschränkt in $H_0^1(\Omega)$, also nach dem Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz 3.35 relativ kompakt in $L^2(\Omega)$. Um zu zeigen, dass M abgeschlossen in $L^2(\Omega)$ ist, sei $(v_n) \subseteq M$ eine Folge, die in $L^2(\Omega)$ gegen $v \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Es folgt für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$:

$$\langle \nabla v, \varphi \rangle := - \int_{\Omega} v (\nabla \cdot \varphi) \, dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n (\nabla \cdot \varphi) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \varphi \, dx,$$

also

$$\langle \nabla v, \varphi \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^n} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)^n} \leq N \|\varphi\|_{L^2(\Omega)^n} \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Da $C_0^\infty(\Omega)^n$ dicht in $L^2(\Omega)^n$ ist, folgt, dass ∇v ein stetiges Funktional mit Norm höchstens N auf $L^2(\Omega)^n$ induziert. Dieses dürfen wir wegen dem Riesz'schen Darstellungssatz (FA11) (isometrisch) mit einer Funktion $\nabla v \in L^2(\Omega)$ identifizieren, so dass $\langle \nabla v, w \rangle = (\nabla v, w)_{L^2(\Omega)^n}$ für alle $w \in L^2(\Omega)^n$ gilt. Nach Konstruktion folgt weiter

$$\langle \nabla v, \varphi \rangle = (\nabla v, \varphi)_{L^2(\Omega)^n} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v (\nabla \cdot \varphi) \, dx \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)),$$

also ist ∇v auch tatsächlich der schwache Gradient von v , und es folgt $v \in M$.

Für $v \in M$ betrachten wir nun das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(\cdot, v(\cdot)) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dieses hat nach Satz 3.43 eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, da die rechte Seite für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$ liegt, wie oben gesehen. Entsprechend definieren wir T als Lösungsoperator

$$T: v \mapsto u = (-\Delta)^{-1} f(\cdot, v) =: T(v).$$

Wir zeigen nun, dass T die Menge M in sich selbst abbildet. Dies wird durch geeignete Wahl des Parameters N erreicht: Sei $v \in M$. Wir betrachten (4.9) in der schwachen Formulierung mit der Testfunktion $\varphi = u$. Dies liefert mit (4.8)

$$|u|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\Omega} f(x, v(x)) u(x) \, dx \leq C_E \|h\|_{L^{q'}(\Omega)} |u|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Mit der Wahl

$$N := C_E \|h\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

ist T also eine Selbstabbildung $M \rightarrow M$.

Es bleibt zu zeigen, dass T stetig in $L^2(\Omega)$ ist. Lemma 4.11 mit den Parametern $p = 2$ und $r = \frac{2}{q'}$, sowie $C = 0$, zeigt, dass der Nemyckii-Operator

$$v \mapsto f(\cdot, v): L^2(\Omega) \rightarrow L^{q'}(\Omega)$$

stetig ist. Nach Satz 3.43 ist

$$(-\Delta)^{-1}: L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

stetig, also auch die Verkettung $T: v \mapsto (-\Delta)^{-1} f(\cdot, v)$ der beiden vorgehenden Abbildungen als Abbildung $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Nun kann der Fixpunktsatz von Schauder in der Form von Satz 4.7 angewendet werden und liefert einen Fixpunkt $u = T(u) \in M$ von T in $L^2(\Omega)$. Insbesondere ist $u \in H_0^1(\Omega)$ und als schwache Lösung des Problems (4.6) erfüllt es

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|f(\cdot, u(\cdot))\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 2\|h\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

nach der Abschätzung aus Satz 3.43. □

Wir schließen den Abschnitt mit weiteren einer Variante des Schauderschen Fixpunktsatzes, welche in den Anwendungen für nichtlineare partielle DGLen oft sehr nützlich ist.

Satz 4.13: Fixpunktsatz von Schaefer/Satz von Leray-Schauder

Sei X ein Banachraum und $T: X \rightarrow X$ sei stetig und bilde beschränkte in relativ kompakte Mengen ab. Weiter sei die die skalierte Fixpunktmenge

$$F := \left\{ x \in X : x = \lambda Tx \text{ mit } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

beschränkt. Dann hat T einen Fixpunkt x^* .

Beweis. Wir führen den zu beweisenden Satz auf den Fixpunktsatz von Schauder zurück.

Sei zunächst $R > 0$ so groß, dass

$$F \subseteq \overline{B_{R/2}(0)}, \quad \text{also} \quad \|x\| \leq \frac{R}{2} \quad (x \in F). \quad (4.10)$$

Sei $B := \overline{B_R(0)}$. Wir verknüpfen die Projektion auf B mit T und erhalten

$$Sx := \begin{cases} Tx & \text{wenn } \|Tx\| \leq R, \\ \frac{RTx}{\|Tx\|} & \text{wenn } \|Tx\| \geq R. \end{cases} \quad (4.11)$$

Offensichtlich gilt $S: X \rightarrow B$ und S bildet weiterhin beschränkte in relativ kompakte Mengen ab, da die Projektion auf B stetig ist. (Im Zweifelsfall: direkt mit Folgenkompaktheit nachrechnen.) Insbesondere ist $S(B)$ als Bild der beschränkten Menge B relativ kompakt. Zudem ist B klarerweise nichtleer, konvex und abgeschlossen. Also können wir den Fixpunktsatz von Schauder, Version 2, Satz 4.8, für die Abbildung $S: B \rightarrow B$ einsetzen.

Demnach hat S einen Fixpunkt $x^* \in M$. Dieser ist tatsächlich auch ein Fixpunkt von T , denn wäre dies nicht der Fall, dann folgt $Sx^* \neq Tx^*$, also nach Konstruktion in (4.11)

$$x^* = Sx^* = \frac{R}{\|Tx^*\|}Tx^*, \quad \|Tx^*\| > R \quad \|x^*\| = R.$$

Aber das bedeutet

$$x^* = \lambda Tx^* \quad \text{für} \quad \lambda = \frac{R}{\|Tx^*\|} < 1,$$

also $x^* \in F$ und daher

$$\|x^*\| \leq R/2$$

nach Konstruktion von R in (4.10). Das ist ein Widerspruch, also ist x^* doch ein Fixpunkt von T . □

Im Kontext des Fixpunktsatzes 4.13 von Schaefer existiert also ein Fixpunkt für T , falls man *alle möglichen* Fixpunkte der Familie von Operatoren λT für $0 \leq \lambda \leq 1$ beschränken kann. Achtung: Es ist *nicht* angenommen, dass solche Fixpunkte existieren!

Dieses Prinzip hängt mit sogenannten *a-priori Abschätzung* zusammen: Lassen sich geeignete Abschätzungen für Lösungen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen beweisen, unter der Annahme, dass solche Lösungen existieren, dann existieren die Lösungen—im Kontext von Satz 4.13—auch tatsächlich. Insbesondere darf man mit (angenommenen) Lösungen hantieren und die volle Flexibilität des Lösungsbegriffes ausnutzen.

Ein weiterer Vorteil des Fixpunktsatzes von Schaefer ist, dass man nicht explizit eine konvexe, kompakte Menge finden muss, in der der Fixpunkt gesucht wird. Dies übernimmt bereits die Formulierung des Satzes. Eine gleichmäßige Abschätzung ist nur für die Menge der Fixpunkte von λT nötig.

Eine unmittelbare spezielle Folgerung von Satz 4.13 ist, dass T , welches beschränkte in relativ kompakte Mengen abbildet und *strikt sublinear* ist, auch einen Fixpunkt besitzt:

Folgerung 4.14

Sei X ein Banachraum und $T: X \rightarrow X$ sei stetig und bilde beschränkte Mengen in relativ kompakte ab, so dass für $\beta \geq 0$ und $\alpha \in [0, 1)$ gilt:

$$\|Tx\| \leq \alpha\|x\| + \beta \quad (x \in X).$$

Dann hat T einen Fixpunkt.

Beweis. Sei $x \in F = \{x \in X : x = \lambda Tx \text{ mit } \lambda \in [0, 1]\}$. Dann folgt

$$\|x\| = \|\lambda Tx\| = \lambda\|Tx\| \leq \lambda\alpha\|x\| + \lambda\beta \leq \alpha\|x\| + \beta,$$

also

$$\|x\| \leq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

und F ist beschränkt. Nach Satz 4.13 hat T einen Fixpunkt. □

Beispiel 4.15: Anwendung des Fixpunktsatzes von Schaefer

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega$ ein C^2 -Rand und sei $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante L . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.12}$$

für jedes $\mu > \max(L, L^2/4)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass, analog wie in Beispiel 4.3, die Lipschitz-stetige Funktion b eine Wachstumsbedingung erfüllt:

$$|b(y)| \leq L|y| + |b(0)| \quad (y \in \mathbb{R}^n),$$

wobei L die Lipschitz-Konstante ist. Insbesondere gilt

$$\|b(\nabla v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + L|b(0)||\Omega|^{\frac{1}{2}} \quad (v \in H_0^1(\Omega)). \quad (4.13)$$

Wir betrachten, wie üblich, zwecks Konstruktion des Fixpunktoperators T die Linearisierung des obigen Problems,

$$\begin{aligned} -\Delta u + \mu u &= -b(\nabla v) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definition der Fixpunktabbildung T : Wir wählen als Banachraum $X = H_0^1(\Omega)$; das bietet sich nach (4.13) an, denn die rechte Seite in (4.14) ist eine $L^2(\Omega)$ -Funktion für jedes $v \in H_0^1(\Omega)$.

Wir definieren T als den Lösungsoperator des linearen Anfangswertproblems (4.14) in Abhängigkeit von v :

$$T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad v \mapsto u = (-\Delta + \mu)^{-1}(-b(\nabla v)) =: T(v).$$

Das ist nach Satz 3.43 wohldefiniert, entsprechend ist $u = T(v) \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von (4.14) mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|b(\nabla v)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|b(\nabla v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.15)$$

Dank der Annahme an den Rand $\partial\Omega$ folgt sogar nach Satz 3.56

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|b(\nabla v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.16)$$

Eigenschaften von T :

- (1) Die Abbildung $v \mapsto -b(\nabla v)$ ist Lipschitz-stetig $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, ebenso ist der Lösungsoperator $(-\Delta + \mu)^{-1}$ stetig $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$. Damit ist auch $T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ stetig.
- (2) Nach (4.13) bildet $v \mapsto b(\nabla v)$ beschränkte Mengen in $H_0^1(\Omega)$ auf beschränkte Mengen von $L^2(\Omega)$ ab. Weiter werden nach (4.15) und (4.16) die beschränkten $b(\nabla v)$ durch $(-\Delta + \mu)^{-1}$ auf beschränkte Mengen in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ abgebildet. Diese sind nach dem Rellich-Kondrachov Kompaktheitssatz 3.35 *kompakt* in $H_0^1(\Omega)$.

Also ist T stetig und bildet beschränkte Mengen in $H_0^1(\Omega)$ in relative kompakte Mengen, ebenfalls in $H_0^1(\Omega)$, ab.

Beschränktheit der Fixpunkte von λT : Wir zeigen, dass die Fixpunktmenge

$$M := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : u = \lambda T u \text{ mit } \lambda \in [0, 1] \right\}$$

beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ ist. Sei dazu $u \in M$ und ohne Einschränkung $\lambda = 0$. (Sonst folgt $u = 0$ und das ist beschränkt.) Dann erfüllt $\frac{u}{\lambda} = Tu$ mit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ die schwache Formulierung von

$$-\Delta \left(\frac{u}{\lambda} \right) + \mu \left(\frac{u}{\lambda} \right) = -b(\nabla u).$$

In dieser testen wir mit $\lambda u \in H_0^1(\Omega)$ und erhalten

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \mu u^2] dx = - \int_{\Omega} \lambda b(\nabla u) u dx \leq \int_{\Omega} [L|\nabla u| + |b(0)|] |u| dx.$$

Mittels Young Ungleichung (3.26) ($\varepsilon = \frac{1}{4L}$) folgt also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \mu u^2] dx &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left[|\nabla u| + \frac{|b(0)|}{L} \right]^2 dx + L \int_{\Omega} u^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{|b(0)|^2 |\Omega|}{2L^2} + L \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\min\left(\frac{1}{2}, \mu - L\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + (\mu - L) \int_{\Omega} u^2 dx \leq \frac{|b(0)|^2 |\Omega|}{2L^2}.$$

Für $\mu > L$ ist M also beschränkt. (Für $b(0) = 0$ folgt sogar $M = 0$, das ist aber auch nicht verwunderlich, da in diesem Fall $u = 0$ natürlich eine Lösung von (4.12) ist!)

Nach dem Fixpunktsatz 4.13 von Schaefer hat T also einen Fixpunkt $Tu = u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei schwache Lösungen $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ von (4.12). Dann ist die Differenz $v = u_1 - u_2$ schwache Lösung von

$$-\Delta v + b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2) + \mu v = 0.$$

Wir testen die schwache Formulierung dieses Problems mit $v \in H_0^1(\Omega)$ und erhalten:

$$0 = \int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + (b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2))v + \mu v^2] dx.$$

Mittels der Lipschitz-Eigenschaft von b gilt

$$\int_{\Omega} (b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2))v dx \geq - \int_{\Omega} |b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2)| |v| dx \geq -L \int_{\Omega} |\nabla v| |v| dx,$$

also, eingesetzt und quadratisch ergänzt,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + (b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2))v + \mu v^2] dx \\ &\geq \int_{\Omega} [|\nabla v|^2 - L|\nabla v| |v| + \mu v^2] dx \\ &= \int_{\Omega} \left(|\nabla v| - \frac{L}{2}|v| \right)^2 dx + \left(\mu - \frac{L^2}{4} \right) \int_{\Omega} v^2 dx. \end{aligned}$$

Für $\mu > L^2/4$ ergibt sich $v = 0$, also $u_1 = u_2$. □

Literaturverzeichnis

- W. Arendt, K. Urban: *Partielle Differenzialgleichungen* (Spektrum, Heidelberg, 2010)
- F. Demengel, G. Demengel: *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2012)
- L.C. Evans: *Partial Differential Equations* (AMS, Providence, 1998).
- D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2001)
- J.L. Lions, E. Magenes: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1972)
- E.M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* (Princeton University Press, 1970)